

HAUPTAUFSÄTZE

Allgemeine Lösung des ebenen Plastizitätsproblems für beliebiges isotropes oder anisotropes Fließgesetz.

Von H. Neuber in Dresden.

Die klassischen Lösungen des ebenen Plastizitätsproblems gelten nur für isotrope Stoffe mit geradlinigem Verlauf der Mohr'schen Grenzkurve. Der Verfasser zeigt mit Hilfe einer sogenannten „Plastizitätsfläche“ (räumliche Darstellung der Fließbedingung in einem von den drei Spannungskomponenten gebildeten Koordinatensystem), daß die allgemeine Lösung für beliebiges Fließgesetz durch ein einfaches Abbildungsverfahren gegeben wird. Die Charakteristiken der Gleichgewichtsgleichungen erscheinen hierbei als 45°-Böschungslinien der Plastizitätsfläche.

The classic solutions of the problem of plane plasticity are confined to isotropic bodies with linear limit curve of the plastic state with regard to Mohr. The author explains by means of a so-called "plasticity surface" (three-dimensional representation of the law of plane plastic flow in a system of coordinates formed by the three components of stress) that the general solution for any law of plastic flow is representable by a graphical method, which can be carried out in a very simple manner. Herein, the characteristic curves of the equations of equilibrium are the lines of 45°-gradient on the plasticity surface.

Les solutions classiques du problème de plasticité plane n'ont été établies que pour des matières isotropes avec une curve linéaire de l'état plastique d'après Mohr. L'auteur montre à l'aide d'une « surface de plasticité » (représentation à trois dimensions de la loi plastique pour un système des coordonnées, formées par les trois composantes de tension), que la solution générale pour une loi plastique quelconque est représentée par une méthode géométrique simple. Ainsi les curves caractéristiques des équations de l'équilibre sont formées par les curves du 45°-gradient de la surface de plasticité.

Классическое решение плоской проблемы пластичности действительно только для изотропной среды с прямолинейной граничной кривой Мора для пластического состояния. При помощи так называемой „поверхности пластичности“ (трехмерного изображения условия текучести в системе координат, образуемой тремя составляющими напряженного состояния) автор показывает, что проблема пластичности для любого условия текучести решается в общем виде путем простого отображения. При этом характеристиками уравнений равновесия являются линии градиента поверхности пластичности.

1. Einführung.

Der wissenschaftlichen Erforschung des Verhaltens fester Körper gegenüber Krafteinwirkungen wird nicht nur vom physikalischen, sondern vor allem vom technischen Standpunkt aus große Bedeutung eingeräumt. Der bildsame oder plastische Zustand nimmt hierbei eine Sonderstellung ein, da es sich um Probleme handelt, von deren Lösung man für die noch wenig erforschte Bruchtheorie und damit für das noch fehlende Bindeglied zwischen Elastizitätstheorie und Festigkeitslehre grundlegende Aufschlüsse erwartet. Daraus erklärt sich die überaus große Zahl der Untersuchungen, die auf diesem Gebiete von der Jahrhundertwende bis heute durchgeführt wurden [1]*).

In der einen Gruppe dieser Untersuchungen wird das Problem mehr vom Standpunkt des Physikers behandelt, wobei man der Beschreibung der Struktur der Materie und ihrer Veränderung bei Einwirkung äußerer Kräfte das Hauptaugenmerk zuwandte. In der zweiten Gruppe, zu der auch vorliegende Arbeit gehört, ist der Standpunkt des Ingenieurs und damit der technischen Mechanik vorherrschend. Infolge der unmittelbaren Bedeutung, welche der Frage der Bruchsicherheit von Bauteilen für die gesamte Technik zukommt, ist für den Ingenieur die Kenntnis der für das Eintreten von Plastizierungen maßgeblichen äußeren Kräfte von besonderem Interesse; dadurch rückt die Frage der plastischen Spannungsverteilung in den Vordergrund der Problemstellung.

Beim ebenen Plastizitätsproblem im Sinne der technischen Mechanik wird die Forderung gestellt, die drei Komponenten des ebenen Spannungstensors mit Anpassung an die Randbedingungen so herzustellen, daß die drei Grundgleichungen erfüllt sind: Diese bestehen aus den beiden Gleichgewichtsbedingungen und einer weiteren Beziehung, die als Fließgesetz oder Plasti-

*) Siehe Schrifttumsverzeichnis am Schluß der Arbeit.

zitätsbedingung bezeichnet wird und für den Plastizierungsvorgang des betreffenden Stoffes maßgebend ist.

Die Lösung dieser Aufgabe wurde seither nur für isotrope Stoffe und auch dort nur für einen linearen Verlauf der Mohrschen Grenzkurve gefunden (Schubspannungshypothese, Arbeiten von Tresca [2], St. Venant [3], Mohr [4], Henky [5], Prandtl [6], Carathéodory [7], Erhard Schmidt [7], Nadai [8] u. a.). Im vorliegenden Bericht wird die allgemeine Lösung für beliebiges Fließgesetz, und zwar sowohl für isotrope, als auch für anisotrope Stoffe angegeben. Hierbei wird der Satz bewiesen, daß die Charakteristiken der Grundgleichungen als Böschungslinien einer Fläche darstellbar sind, die durch den analytischen Ausdruck der Plastizitätsbedingung in geeigneten Koordinaten gegeben ist. Der Grundriß dieser Fläche mit eingezeichneten Höhenlinien stellt ein Diagramm dar, das zur Darstellung der Eigenschaften anisotrop-plastischer Stoffe geeignet ist und sowohl zur Charakterisierung der ebenen Plastizitätsbedingung, als auch zur graphisch-numerischen Behandlung von Spannungsverteilungsproblemen verwendet werden kann.

2. Aufstellung der Grundgleichungen in kartesischen Koordinaten.

Der ebene Spannungstensor besitzt in den kartesischen Koordinaten x, y die Komponenten σ_x, σ_y (Normalspannungen) und τ_{xy} (Schubspannung), welche durch die Gleichgewichtsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

miteinander verknüpft sind.

Beim plastischen Körper kommt als dritte Gleichung die Plastizitätsbedingung oder das Fließgesetz hinzu, eine Gleichung, welche allgemein aussagt, daß der Spannungszustand ein Grenzzustand ist und bei geringfügigem Anwachsen der Spannungen über diesen Grenzzustand hinaus ein Abgleiten einzelner Schichten erfolgt. Diese Bedingung stellt eine funktionale Beziehung zwischen den drei Spannungskomponenten dar, und kann allgemein in der Form

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

geschrieben werden, die sowohl für isotrope, als auch für anisotrope Stoffe Gültigkeit hat (im Falle der Isotropie gilt beim Übergang auf die Hauptspannungslinien Unabhängigkeit von der Hauptspannungsrichtung).

3. Übergang auf beliebige Koordinaten.

Zur Erzielung einer möglichst einfachen Integration der Grundgleichungen ist der Übergang auf ein spezielles Koordinatensystem zweckmäßig, in welchem die transformierten Grundgleichungen nur noch Ableitungen nach einer der beiden Veränderlichen enthalten. Vorher seien

zunächst die allgemeinen Beziehungen für den Übergang auf ein beliebiges Koordinatensystem angegeben, aus welchem dann im nächsten Abschnitt die besonderen Eigenschaften des gesuchten speziellen Systems hergeleitet werden sollen.

Wird der Winkel zwischen der x - und u -Richtung mit α_u , bzw. der Winkel zwischen x - und v -Richtung mit α_v bezeichnet (Bild 1) und sind h_u und h_v die Verzerrungsfaktoren, d. h. $h_u du$ und $h_v dv$ Linienelemente, so gilt für deren Komponenten:

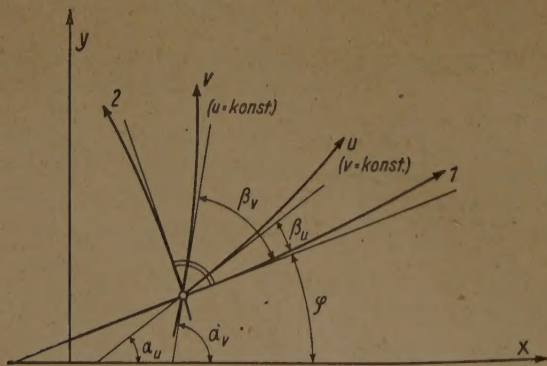


Bild 1. Bezeichnungen beim Übergang auf beliebige Koordinaten sowie auf die Hauptlinien.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h_u} \frac{\partial x}{\partial u} &= \cos \alpha_u, & \frac{1}{h_u} \frac{\partial y}{\partial u} &= \sin \alpha_u, \\ \frac{1}{h_v} \frac{\partial x}{\partial v} &= \cos \alpha_v, & \frac{1}{h_v} \frac{\partial y}{\partial v} &= \sin \alpha_v \end{aligned} \right\} \dots (3).$$

Hieraus ergeben sich für die Differentiationsoperatoren $\frac{\partial}{\partial u}$ und $\frac{\partial}{\partial v}$ folgende Transformationsformeln:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y} = h_u \left[\cos \alpha_u \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha_u \frac{\partial}{\partial y} \right], \\ \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y} = h_v \left[\cos \alpha_v \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha_v \frac{\partial}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4).$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach den Operatoren $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ führt auf die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{\sin(\alpha_v - \alpha_u)} \left[\frac{\sin \alpha_v}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\sin \alpha_u}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \right], \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{\sin(\alpha_v - \alpha_u)} \left[-\frac{\cos \alpha_v}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\cos \alpha_u}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5).$$

Durch Anwendung auf die Grundgleichungen (1) des Problems ergibt sich:

$$\frac{1}{h_u} \left[\sin \alpha_v \frac{\partial \sigma_x}{\partial u} - \cos \alpha_v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial u} \right] - \frac{1}{h_v} \left[\sin \alpha_u \frac{\partial \sigma_x}{\partial v} - \cos \alpha_u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial v} \right] = 0 \quad \dots \dots \dots (6),$$

$$\frac{1}{h_u} \left[\sin \alpha_v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial u} - \cos \alpha_v \frac{\partial \sigma_y}{\partial u} \right] - \frac{1}{h_v} \left[\sin \alpha_u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial v} - \cos \alpha_u \frac{\partial \sigma_y}{\partial v} \right] = 0 \quad \dots \dots \dots (7).$$

4. Integration für beliebiges Fließgesetz.

Das bisher noch beliebig angenommene Koordinatensystem u, v wird nunmehr in der Weise spezialisiert, daß sich im Sinne einer möglichst einfachen Integration in Gleichung (6) nur mehr Ableitungen nach u vorfinden, während in Gleichung (7) nur mehr Ableitungen nach v auftreten sollen. Die hierfür erforderlichen Bedingungsgleichungen:

$$\sin \alpha_u \frac{\partial \sigma_x}{\partial v} - \cos \alpha_u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial v} = 0 \quad \dots \dots \dots (8),$$

$$\sin \alpha_v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial u} - \cos \alpha_v \frac{\partial \sigma_y}{\partial u} = 0 \quad \dots \dots \dots (9).$$

lassen sich durch entsprechende Spezialisierung der bisher noch frei verfügbaren Winkel α_u und α_v erfüllen. Aus den Restgliedern der Gleichungen (6) und (7) folgen dann die Beziehungen:

$$\sin \alpha_v \frac{\partial \sigma_x}{\partial u} - \cos \alpha_v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial u} = 0 \quad \dots \dots \dots (10),$$

$$\sin \alpha_u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial v} - \cos \alpha_u \frac{\partial \sigma_y}{\partial v} = 0 \quad \dots \dots \dots (11).$$

Gl. (9) und (10) führen auf zwei verschiedene Beziehungen für α_v , während Gl. (8) und (11) zwei Beziehungen für α_u liefern. Daher muß sowohl die Koeffizientendeterminante der Gl. (9) und (10), als auch jene der Gl. (8) und (11) verschwinden, d. h. es gilt:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial u} \frac{\partial \sigma_y}{\partial u} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial u} \right)^2 = 0 \quad (\text{längs } v = \text{konst.}) \quad \dots \dots \dots (12)$$

bzw.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial v} \frac{\partial \sigma_y}{\partial v} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial v} \right)^2 = 0 \quad (\text{längs } u = \text{konst.}) \quad \dots \dots \dots (13).$$

Allgemein folgt demnach für jede der beiden Kurvenscharen

$$(d\sigma_x) \cdot (d\sigma_y) - (d\tau_{xy})^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (14).$$

Infolge der Identität

$$4(d\sigma_x) \cdot (d\sigma_y) = [d(\sigma_x + \sigma_y)]^2 - [d(\sigma_x - \sigma_y)]^2 \quad \dots \dots \dots (15)$$

geht Gl. (14) nach Multiplikation mit 4 in die pythagoräische Beziehung

$$[d(\sigma_x + \sigma_y)]^2 = [d(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + [d(2\tau_{xy})]^2 \quad \dots \dots \dots (16)$$

über. Diese gestattet eine einfache geometrische Deutung:

Trägt man in den Koordinaten $(\sigma_x + \sigma_y)$, $(\sigma_x - \sigma_y)$ und $(2\tau_{xy})$ (Bild 3) die dem Fließgesetz entsprechenden Spannungswerte ein, so liegen dieselben auf einer Fläche, die im folgenden als „Plastizitätsfläche“ gekennzeichnet wird. Auf der Plastizitätsfläche stellen auf Grund der Beziehung (16) die Linien $u = \text{konst.}$ und $v = \text{konst.}$ die 45°-Böschungslinien dar. Für den Winkel α_v oder α_u , bzw. allgemein α folgt aus Gl. (9) und (10), bzw. (8) und (11) die einfache Gesetzmäßigkeit:

$$\text{tg } \alpha = \frac{d\sigma_y}{d\tau_{xy}} \quad \dots \dots \dots (17),$$

bzw.

$$\text{ctg } \alpha = \frac{d\sigma_x}{d\tau_{xy}} \quad \dots \dots \dots (18).$$

Demnach wird

$$\frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) = \operatorname{ctg} (2\alpha) = \frac{d(\sigma_x - \sigma_y)}{d(2\tau_{xy})} \quad \dots \quad (19),$$

so daß der Winkel (2α) als Winkel der auf die $(2\tau_{xy})$, $(\sigma_x - \sigma_y)$ -Ebene projizierten Böschungslinien mit der $(\sigma_x - \sigma_y)$ -Achse abgelesen werden kann (Bild 2).

Wird mittels der Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= p, \\ \sigma_x - \sigma_y &= q \cos 2\varphi, \\ 2\tau_{xy} &= q \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (20)$$

auf Zylinderkoordinaten $p, q, (2\varphi)$ übergegangen, so entspricht der Winkel φ dem Winkel zwischen einer Hauptspannungsrichtung und der x -Achse (Bild 1), während p und q die Summe bzw. Differenz der beiden Hauptspannungen angeben. Durch Differentiation folgt hieraus:

$$\left. \begin{aligned} d(\sigma_x + \sigma_y) &= dp, \\ d(\sigma_x - \sigma_y) &= \cos 2\varphi \cdot dq - 2q \sin 2\varphi \cdot d\varphi, \\ d(2\tau_{xy}) &= \sin 2\varphi \cdot dq + 2q \cos 2\varphi \cdot d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (21).$$

Aus der zweiten und dritten dieser Gleichungen ergibt sich mit Bezug auf Gleichung (19) längs der Linien $v = \text{konst.}$ bzw. $u = \text{konst.}$:

$$\frac{d(\sigma_x - \sigma_y)}{d(2\tau_{xy})} = \frac{\cos 2\varphi - \sin 2\varphi \frac{2q}{dq} \frac{d\varphi}{dq}}{\sin 2\varphi + \cos 2\varphi \frac{2q}{dq} \frac{d\varphi}{dq}} = \operatorname{ctg} (2\alpha) \quad \dots \quad (22).$$

Die Auflösung nach $\frac{2q}{dq} \frac{d\varphi}{dq}$ liefert

$$\frac{2q}{dq} \frac{d\varphi}{dq} = \operatorname{tg} 2(\alpha - \varphi) \quad \dots \quad (23).$$

Andererseits liefert die Addition der beiden, längs der Linien $u = \text{konst.}$ bzw. $v = \text{konst.}$ geltenden Gleichungen (17) und (18) in Verbindung mit den Gleichungen (21):

$$\frac{d(\sigma_x + \sigma_y)}{d(2\tau_{xy})} = \frac{dp}{\sin 2\varphi dq + 2q \cos 2\varphi d\varphi} = \frac{1}{\sin 2\alpha} \quad \dots \quad (24).$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf Gleichung (23):

$$\sin 2\alpha \, dp = [\sin 2\varphi + \cos 2\varphi \cdot \operatorname{tg} 2(\alpha - \varphi)] \, dq \quad \dots \quad (25),$$

woraus nach dem Additionstheorem

$$dq = \cos 2(\alpha - \varphi) \cdot dp \quad \dots \quad (26)$$

hervorgeht. Zugleich ergibt sich mit Bezug auf Gleichung (23):

$$qd(2\varphi) = \sin 2(\alpha - \varphi) \cdot dp \quad \dots \quad (27).$$

Wird noch entsprechend Bild 1 für den Winkel der u - bzw. v -Richtung mit der Hauptspannungsrichtung die Bezeichnung β_u bzw. β_v oder allgemein β eingeführt, so erhält man schließlich:

$$\left. \begin{aligned} dq &= \cos (2\beta) \cdot dp \\ qd(2\varphi) &= \sin (2\beta) \cdot dp \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (28)$$

Dieser Sachverhalt ist in Bild 3 an Hand der Projektionen eines Linienelementes auf die drei Richtungen $p, q, (2\varphi)$ ersichtlich. Durch Quadrieren folgt aus den Gleichungen (28) wieder eine pythagoräische Beziehung:

$$(dp)^2 = (dq)^2 + q^2 [d(2\varphi)]^2 \quad \dots \quad (29).$$

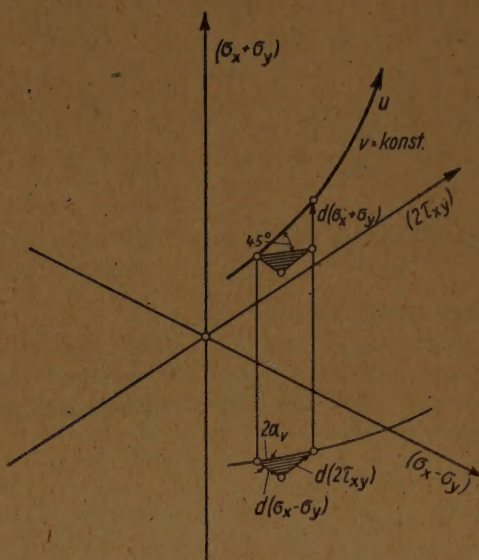


Bild 2. Ermittlung des Tangentenwinkels α .

Bestimmung der Eigenschwingungszahlen von durchlaufenden Trägern und Rahmen.

Von Walter Mudrak in Graz.

Für die Berechnung der Eigenschwingungszahlen eines an beiden Enden unverschieblich gelagerten, aber elastisch eingespannten Stabes von konstantem Querschnitt und gleichförmiger Massebelegung wird ein Diagramm gegeben. Seine Anwendung zur Berechnung der Eigenschwingungszahlen von durchlaufenden Trägern und von Rahmen, deren Felder die obigen Bedingungen erfüllen, wird gezeigt und an Beispielen erläutert.

A diagram is given for the computation of the natural frequencies for a bar of constant cross-section and load that is immovably fixed but elastic ally clamped at both ends. The application of the diagram to the computation of the natural frequencies for continuous beams and frames that are satisfying the foregoing conditions is shown, and explained by examples.

L'auteur donne un diagramme pour le calcul des fréquences naturelles d'une barre de section et de charge constantes qui est fixée aux deux bouts d'une manière immuable mais élastique. Le diagramme est appliqué au calcul des fréquences naturelles de poutres et de cadres remplissant les conditions mentionnées. De plus l'auteur explique le diagramme en donnant des exemples.

Дается диаграмма для расчета собственных частот колебаний жестко опертой, но упруго защемленной по концам балки постоянного сечения с равномерной нагрузкой. На примерах поясняется применение этой диаграммы при расчете собственных частот колебаний многопролетных балок или рам, пролеты которых удовлетворяют указанным выше условиям.

1. Einleitung. Vom Verfasser wurde seinerzeit¹⁾ ein Diagramm mitgeteilt, das die Grundschwingungszahlen beiderseits elastisch eingespannter Stäbe von festem Querschnitt auf unverschieblichen Stützen zu ermitteln gestattet und somit auch jene von durchlaufenden Trägern, die sich aus so gearteten Feldern zusammensetzen lassen. Da unter bestimmten Umständen auch die Oberschwingungen für die Beurteilung eines Trägers von Bedeutung sein können — so liegt die erste Oberschwingungszahl des im Beispiel 1 betrachteten Trägers nur um 10% höher als jene der Grundschwingung —, wird hier eine Darstellung zur Bestimmung der Grund- sowie der ersten bis dritten Oberschwingungszahlen solcher Felder gegeben.

Es soll daher die allgemein gültige Beziehung zwischen der Eigenschwingungszahl und den beiden Einspannungsgraden eines Stabfeldes dadurch dargestellt werden, daß diese drei Größen durch geeignete dimensionslose Werte ausgedrückt werden, zwischen denen ein Diagramm den Zusammenhang vermittelt. Weiter werden die zwischen diesen Werten für zwei verschiedene und insbesondere für aufeinanderfolgende Felder eines durchlaufenden Trägers geltenden Beziehungen abgeleitet und auf den Fall von Rahmen mit unverschieblicher Knotenfigur erweitert. Für letzteren Fall werden noch Angaben über die näherungsweise Berücksichtigung der hier zu beachtenden Längskräfte gemacht. Der in übersichtlicher Tabellenform gebrachte Rechenvorgang wird an Hand von zwei Zahlenbeispielen erläutert.

2. Das beiderseits elastisch eingespannte Stabfeld. Die Betrachtungen beschränken sich zunächst auf ein Feld eines durchlaufenden Trägers; ihre Erweiterung auf die Stäbe einer Rahmenfigur wird in Ziffer 4 vorgenommen werden. Schneiden wir das i -te Feld des Trägers gemäß Bild 1 durch Schnitte über den Stützen $i-1$ und i heraus, so müssen

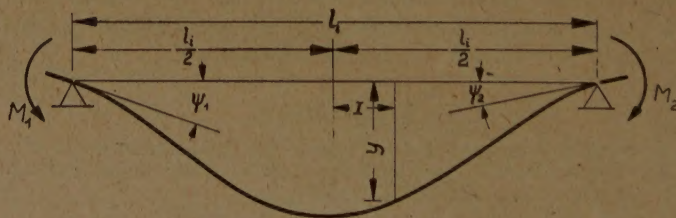


Bild 1. Biegelinie des schwingenden Feldes.

wir zur Aufrechterhaltung der elastischen Verhältnisse die an den Schnittstellen tätigen Biegemomente ${}_iM_1$ und ${}_iM_2$ als äußere Belastung anbringen. Sie sollen den Verdrehungswinkeln daselbst proportional sein und durch

$${}_iM_1 = -\frac{4EI_i}{l_i} \cdot K_1 \cdot \psi_1 \quad \text{und} \quad {}_iM_2 = -\frac{4EI_i}{l_i} \cdot K_2 \cdot \psi_2 \dots \dots \dots (1)$$

¹⁾ W. Mudrak, Zur Ermittlung der Grundschwingungszahlen von durchlaufenden Trägern, Ing.-Arch. 7 (1936) S. 51. Dort selbst auch weitere Literaturangaben über Sonderfälle (Zweifellos K. Fiedler, Bauz. 11 (1933) S. 647; Dreifeldträger: W. Kaufmann, Z. angew. Math. Mech. 2 (1922) S. 34 und nomographische Lösungen (allgemein: D. Smith: Engineering 120 (1925), S. 808; für symmetrische Dreifeldträger: W. Prager, Ing.-Arch. 3 (1932) S. 298 und das in Fußnote 2) genannte Buch, S. 148.

dargestellt werden, worin die dimensionslosen Beiwerte iK_1 und iK_2 das auf die Stabsteifigkeit bezogene Maß der Einspannungen bedeuten. Die von dem Ort x und der Zeit t abhängige Ausbiegung $y(x, t)$ eines Trägerpunktes gehorcht der Differentialgleichung (q_i = Gesamtlast je Längeneinheit)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI_i g}{q_i} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

mit g als Erdbeschleunigung. Ihre Lösung ist durch

$$y = z(x) \cdot \sin \omega t \quad \dots \dots \dots (3)$$

mit

$$z = C_1 \sin \kappa x + C_2 \cos \kappa x + C_3 \operatorname{Sh} \kappa x + C_4 \operatorname{Co} \kappa x \quad \dots \dots (4)$$

gegeben, wobei

$$\kappa = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 q_i}{EI_i g}} \quad \dots \dots \dots (5).$$

Die Randbedingungen

$$z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{4 iK_1}{l_i} \quad \text{für} \quad x = -\frac{l_i}{2}$$

$$z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{dz}{dx} \cdot \frac{4 iK_2}{l_i} \quad \text{für} \quad x = +\frac{l_i}{2}$$

führen mit

$$\lambda_i' = \kappa \frac{l_i}{2} \quad \dots \dots \dots (6)$$

zur Frequenzgleichung

$$iK_1 \cdot iK_2 + \frac{p}{2} (\lambda_i') (iK_1 + iK_2) + q (\lambda_i') = 0 \quad \dots \dots \dots (7).$$

Darin wurden die Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{2} (\lambda_i') &= \frac{\lambda_i' (\operatorname{ctg} \lambda_i' - \operatorname{tg} \lambda_i' - \operatorname{Sh} \lambda_i' - \operatorname{Co} \lambda_i')}{2 (\operatorname{Sh} \lambda_i' \operatorname{ctg} \lambda_i' - \operatorname{Co} \lambda_i' \operatorname{tg} \lambda_i')} = \frac{\lambda_i'}{4} \left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \right) \\ q (\lambda_i') &= \frac{-\lambda_i'^2}{\operatorname{Sh} \lambda_i' \operatorname{ctg} \lambda_i' - \operatorname{Co} \lambda_i' \operatorname{tg} \lambda_i'} = \frac{\lambda_i'^2}{4} \left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}} \right) \left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

eingeführt, um eine kurze Schreibweise zu erreichen und den Charakter der Gleichung besser erkennen zu können. $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}}$ und $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ sind von F. W. Walting berechnete und im Buche von Hohenemser und Prager²⁾ veröffentlichte Frequenzfunktionen.

Die Gleichung (7) zwischen den Einspannmaßen iK_1 , iK_2 und dem Parameter

$$\lambda_i = 2 \lambda_i' = \kappa l_i \quad \dots \dots \dots (9)$$

wird durch das Diagramm Bild 2 wiedergegeben. An seinem oberen und unteren Rande verlaufen zwei gleiche nach λ bezifferte Leitern; zwischen ihnen zwei nach K bezifferte sich schneidende Kurvenscharen. Eine geradlinige Verbindung zweier mit demselben λ -Wert versehenen Punkte wird durch die K -Scharen derart geschnitten, daß auf ihr zwei projektive K -Skalen entstehen, die so zueinander liegen, daß jene Punkte zusammenfallen, deren K -Werte gemäß (7) zusammengehören. Durch passende Wahl der Konstanten für diese Skalen wurden die Doppelwurzeln ($K_1 = K_2$) von (7) jeweils an den oberen oder unteren Rand des Diagramms gebracht. Dadurch ergänzen sich die Kurven der beiden Scharen derart, daß die mit einem bestimmten Wert K versehene Linie der einen Schar stets am Rande von der gleichbezeichneten Kurve der anderen Schar abgelöst wird und mit ihr zusammen einen durch das ganze Diagramm laufenden zickzackartigen Zug bildet. Jeder Wert von K tritt daher auf der Ablesegeraden λ senkrecht zur λ -Achse nur je einmal auf und gestattet dort die Ablesung des zugehörigen K für das andere Stabende.

Sind die beiden Einspanngrade unmittelbar gegeben, so braucht man nur die damit bezifferten K -Kurven miteinander zum Schnitt zu bringen und durch den so bestimmten Punkt die Ablesegerade senkrecht zum oberen bzw. unteren Rand des Diagramms zu legen; sie muß an beiden Leitern dieselbe Ablesung geben. So folgt für den einerseits gelenkig gelagerten, auf der anderen Seite aber eingespannten Stab mit $K_1 = 0$, $K_2 = \infty$ durch Schnitt der zugehörigen

²⁾ K. Hohenemser und W. Prager, Dynamik der Stabwerke, Berlin 1933.

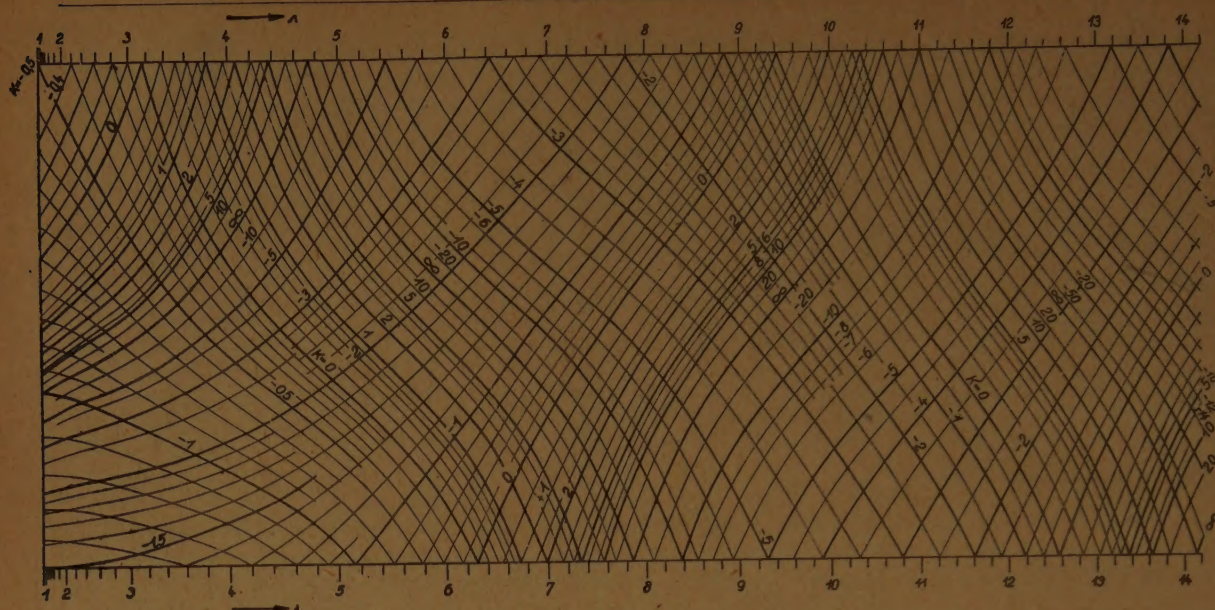


Bild 2. Diagramm für Gleichung (7).

Kurven ein $\lambda^{(0)} = 3,927$. Wenn wir die Linien aber weiter verfolgen, so sehen wir, daß sie an den Rändern des Diagramms „gespiegelt“ werden und sich alsdann bei $\lambda^{(1)} = 7,07$ nochmals schneiden. Weitere Schnittpunkte liegen bei $\lambda^{(2)} = 10,21$ und $\lambda^{(3)} = 13,36$. Durch diese Lösungen sind auch die ersten drei Oberschwingungen des Trägers gefunden; ihre Ordnung ist durch die als eingeklammelter Exponent beigefügte Zahl angeführt, die zugleich die Zahl der Knotenpunkte angibt, die im Feld auftreten. Um einen Überblick über die mittels des Diagramms erhältlichen Lösungen zu haben, ist es in Bild 3 schematisch dargestellt. Darin ist nur die Linie $K = \infty$ eingetragen, die, abwechselnd der einen oder der anderen Schar zugehörend, sich zu einem zickzackförmigen Zug zusammenschließt, der die ganze Diagrammfläche in einzelne Felder unterteilt, die mit den Ziffern 0 bis 4 versehen sind. Diese Ziffern geben die Zahl der jeweils bei dieser Lösung im betreffenden Stabfeld entstehenden Schwingungsknoten und somit die Ordnungszahl der Oberschwingung an (0 bedeutet die Grundschwingung). Die auf der Grenzkurve $K = \infty$ selbst gefundenen Lösungen werden jeweils noch dem angrenzenden Diagramm-

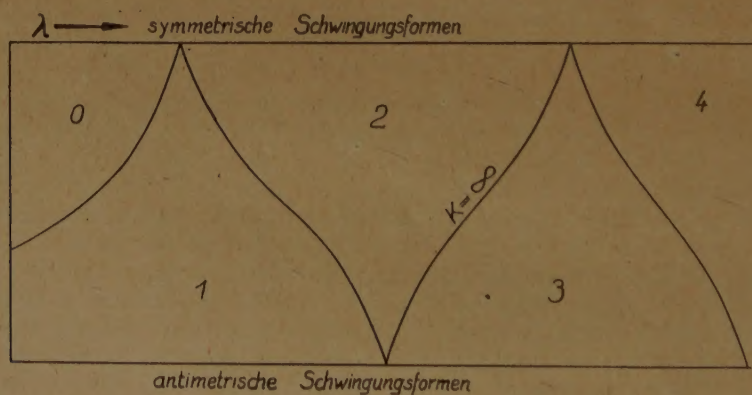


Bild 3. Schema des Diagramms.

feld zugewiesen, das die kleinere Ordnungszahl trägt. Wie ersichtlich, gehören die auf den Berandungslinien liegenden Lösungen mit paarweise gleichen Einspanngraden auf dem oberen Rande den symmetrischen, auf dem unteren Rande den antimetrischen Schwingungsformen zu.

3. Anwendung des Diagramms. Um das Diagramm zur Untersuchung von durchlaufenden Trägern verwenden zu können, müssen wir nur noch die Beziehungen aufstellen, die zwischen den λ -Werten aller Felder bestehen müssen und jene zwischen den K -Werten benachbarter Felder an den Zwischenstützen. Die erste fließt aus der Bedingung, daß sämtliche

Stabfelder im gleichen Takt, also mit derselben sekundlichen Schwingzahl

$$n_s = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda_i}{l_i} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI_i g}{q_i}} \dots \dots \dots (10)$$

sich bewegen sollen, woraus

$$\lambda_i = \lambda_k \frac{l_i}{l_k} \sqrt{\frac{q_i I_k}{q_k I_i}} \dots \dots \dots (11)$$

folgt, worin die mit dem Zeiger k versehenen Größen die eines beliebig gewählten Bezugfeldes bedeuten. Die Forderung der Stetigkeit der Biegelinie über den Zwischenstützen führt wegen der paarweisen Gleichheit der Stützenmomente dortselbst zu der Beziehung zwischen den bezogenen Einspanngraden

$${}_{i+1}K_1 = -\frac{l_{i+1}I_i}{l_i I_{i+1}} {}_iK_2 = {}_{i+1}\alpha_i \cdot {}_iK_2 \dots \dots \dots (12).$$

Praktisch wird das Diagramm wie folgt benutzt: Nach Annahme bzw. Schätzung eines λ -Wertes für ein Feld folgen aus (11) jene für alle anderen. Da beispielsweise am linken Ende des durchlaufenden Trägers die End einspannung bekannt ist, folgt aus dem Diagramm mit dem λ_1 -Wert für das Endfeld der ${}_1K_2$ -Wert für die erste Innenstütze und aus (12) jener ${}_2K_1$ für dieselbe Stelle, aber auf das zweite Feld bezogen. Für dieses gibt wieder das Diagramm die nächste Größe von ${}_2K_2$ usw. So kann man, von einem Ende des Trägers beginnend, durch abwechselnde Benutzung des Rechenbildes und der Gl. (12) bis zum anderen Ende fortschreiten, dessen Einspanngrad wieder festliegt. War die ursprünglich angenommene Eigenschwingzahl richtig gewählt, so muß die aus der Rechnung folgende Einspannung mit der vorgegebenen übereinstimmen. Sonst ist der Rechnungsgang mit entsprechend abgeänderten λ -Werten zu wiederholen. Besser ist es jedoch, von den beiden Trägerenden auszugehen und über einer Innenstütze den Zusammenschluß, d. h. die Übereinstimmung der Einspanngrade, herzustellen. Indem bei Betrachtung jedes Feldes die jeweilige Knotenzahl beachtet wird, läßt sich sofort aus der Summe der in allen Feldern auftretenden Knotenpunkten die Ordnung der so gefundenen Eigenschwingungszahl feststellen. Zweckmäßig wird der Rechnungsgang in Tabellenform festgehalten, wie dies aus den Zahlenbeispielen zu ersehen ist.

Rahmentragwerke. Unter der Voraussetzung, daß sich bei der betrachteten Schwingung die Knotenpunkte einer Rahmenfigur nicht verschieben, kann das Diagramm auch zur Berechnung der Eigenschwingungszahlen von ein- oder mehrgeschossigen Rahmen verwendet werden. Diese Bedingung ist bekanntlich entweder dann erfüllt, wenn durch die Art der Abstützung des Stabwerkes eine Bewegung der Knotenfigur verhindert wird oder wenn es sich um eine symmetrische Schwingungsform eines in allen Punkten hinsichtlich der Maße, Steifigkeiten und Massen bzw. Belastungen symmetrischen Rahmens handelt. Da in diesem Fall in einem biegeungssteifen Knotenpunkt mehr als zwei Stäbe zusammentreffen, deren Anschlußmomente bei gleichem Verdrehungswinkel im Gleichgewicht stehen müssen, ist dort die Gleichung (12) zu ersetzen durch die allgemeinere Bedingung

$$\sum \frac{KI}{l} = 0 \dots \dots \dots (13).$$

Die Summe ist über alle Stäbe des Knotens zu erstrecken.

Eine weitere, aber in praktischen Fällen wenig ausschlaggebende Änderung besteht darin, daß in den Rahmenstäben (Stielen) durch die Belastung Längskräfte auftreten, die die Eigenschwingungszahl etwas beeinflussen. Man kann diese Kräfte jedoch näherungsweise berücksichtigen, daß man sich jene Steifigkeit $\triangle EI$ errechnet, bei der dieser Stab unter der vorgegebenen Last gerade die Eulersche Knickgrenze erreicht, und diesen Wert von $\triangle EI$ im Falle von Druckkräften von der tatsächlichen Steifigkeit abzieht, bei Zugkräften jedoch ihr hinzufügt. Da meist die Masse dieser Stiele selbst sehr klein ist gegenüber jener der Riegel und der mit diesen schwingenden Decken und deren Nutzlasten, liegt das λ der Stiele praktisch beim Werte Null. Man kann daher, wie es auch im Beispiel 2 durchgeführt wurde, sofort die den jeweiligen Fuß einspannungen entsprechenden K -Werte für den Stielkopf entnehmen und ein für allemal in die weitere Rechnung einführen.

4. Zahlenbeispiele. Es sollen die ersten Eigenschwingungszahlen des in Bild 4 dargestellten durchlaufenden Trägers bestimmt werden. Das Trägheitsmoment aller Felder ist

$I = 50\,000\text{ cm}^4$, $E = 2\,100\,000\text{ kg/cm}^2$. Die durch (11) und (12) erklärten Werte c und α be-
tragen

$$c_1 = 1,00, \quad c_2 = \frac{2}{6} \cdot \sqrt[4]{\frac{1,5}{5,0}} = 0,2465, \quad c_3 = \frac{5}{6} = 0,833,$$

$${}_2\alpha_1 = -\frac{2}{6}, \quad {}_2\alpha_3 = -\frac{2}{5}.$$

Aus der ersten Annahme $\lambda_1 = 4,20$ folgen $\lambda_2 = 1,036$ und $\lambda_3 = 3,50$. Aus den End einspannungen ${}_1K_1 = \infty$ und ${}_3K_2 = 0$ der Endfelder ergeben sich mittels des Diagramms ${}_1K_2 = 0,78$ und ${}_3K_1 = 1,05$, und weiter durch Umrechnung mit den zugehörigen α -Werten ${}_2K_1 = -0,26$ und ${}_2K_2' = -0,42$. Dagegen liefert das Diagramm für das zweite Feld mit ${}_2K_1$ und λ_2 ein ${}_2K_2' = -0,67$. Der Unterschied von 0,25 läßt erkennen, daß der geschätzte Wert von λ_1 noch zu klein war. Ein weiterer Versuch mit $\lambda_1 = 4,40$ gibt bereits $\Delta = -0,81$, ein dritter mit $\lambda_1 = 4,30$ ein $\Delta = -0,07$. Der ganze Rechnungsvorgang ist in Tabelle 1 übersichtlich dargestellt. Praktisch wird die endgültige Lösung durch Auftragen von Δ als Funktion von λ_1 gefunden (Bild 5). In der Tabelle ist dieser Wert nochmals zur Kontrolle untersucht worden und ergab praktisch $\Delta = 0$. In dieser Zeile wurden auch jenen K -Werten, die sich aus der Ablesung im Diagramm ergaben, in hochgestellten Klammern die jeweiligen Knotenzahlen beigelegt, hier also stets 0. Eine entsprechende Durchrechnung zur Feststellung der ersten Oberschwingungszahl ist in den nächsten Zeilen veranschaulicht und läßt erkennen, daß diese zwischen $\lambda_1 = 4,49$ und 4,50 liegen muß. Der erste Schwingungsknoten tritt hier also

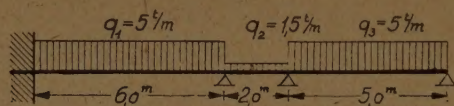


Bild 4. Beispiel 1.

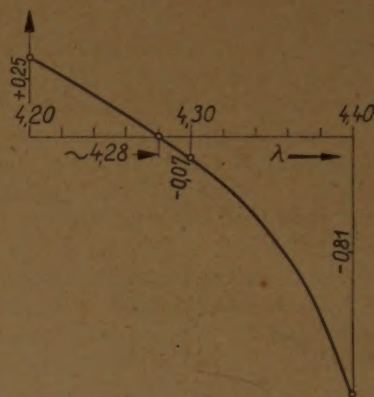


Bild 5. Zeichnerische Einschaltung.

m Mittelfeld auf. Dagegen ergibt die Suche nach der zweiten Oberschwingungszahl, daß alsdann in den beiden Endfeldern je ein Knoten auftreten muß. In der Tafel ist nur die Zeile mit der endgültigen Lösung $\lambda_1 = 7,42$ wiedergegeben. Die aus den λ_1 nach (10) errechneten sekundlichen Schwingungszahlen betragen 11,85, 13,0 und 35,6.

Tafel 1.

λ_1	λ_2	λ_3	${}_1K_2$	${}_2K_1$	${}_2K_2'$	Δ	${}_2K_2''$	${}_3K_1$
4,20	1,036	3,50	+0,78	-0,26	-0,67	+0,25	-0,42	+1,05
4,40	1,085	3,667	+2,00	-0,67	-0,23	-0,81	-1,04	+2,60
4,30	1,060	3,583	+1,30	-0,43	-0,55	-0,07	-0,62	+1,55
4,28	1,055	3,565	+1,23 ⁽⁰⁾	-0,41	-0,56 ⁽⁰⁾	0	-0,56	+1,40 ⁽⁰⁾
4,50	1,110	3,75	+4,00	-1,33	-1,67	-0,25	-1,92	+4,8
4,49	1,106	3,74	+3,80 ⁽⁰⁾	-1,26	-1,96 ⁽¹⁾	+0,16	-1,80	+4,5 ⁽⁰⁾
7,42	1,829	6,183	+2,16 ⁽¹⁾	-0,73	+0,12 ⁽⁰⁾	0	+0,12	-0,29 ⁽¹⁾

Als weiteres Beispiel soll der in Bild 6 dargestellte Rahmen mit unverschieblicher Knotenfigur behandelt werden. Die Stiele haben ein $I_s = 25\,000\text{ cm}^4$, der Riegel über alle Felder durch-

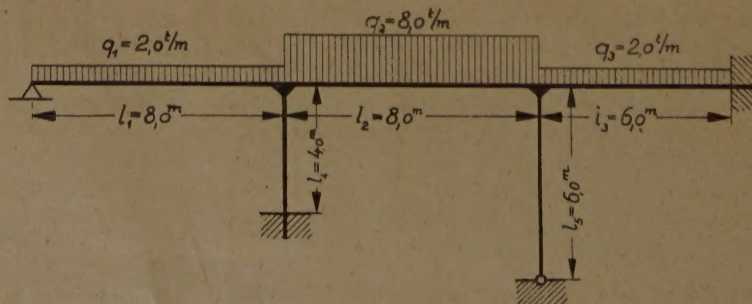


Bild 6. Beispiel 2.

laufend ein $I_r = 100\,000\text{ cm}^4$. Infolge der Belastung entstehen in den Stielen Druckkräfte von etwa 40 t bzw. 38 t, denen ein $I = 310\text{ cm}^4$ bzw. 660 cm^4 entspricht, um die Knicklast nach Euler darzustellen. Die wirksamen Trägheitsmomente der Stiele sind daher nur

$$I_4 = 24\,690\text{ cm}^4 \quad \text{bzw.} \quad I_5 = 24\,340\text{ cm}^4.$$

Da die Stiele unten eingespannt bzw. gelenkig gelagert sind, ist ihr Einspanngrad für den Kopf mit $\lambda = 0$ aus dem Diagramm ${}_4K_2 = -1,00$ bzw. ${}_5K_2 = -0,75$. Führen wir alle Werte λ auf jenen des Mittelfeldes λ_2 zurück, so gilt

$$c_1 = \frac{8}{8} \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{8}} = 0,707, \quad c_2 = 1,00, \quad c_3 = \frac{6}{8} \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{8}} = 0,530,$$

während, wie schon oben bemerkt und verwendet, für die Stiele mit $\lambda = 0$ gerechnet wird. Die Berechnung ist, ausgehend von dem willkürlich angenommenen Wert $\lambda_2 = 7,00$, in der Tafel 2 dargestellt.

Tafel 2.

λ_1	λ_2	λ_3	${}_1K_2$	${}_2K_1$	${}_2K_2$	Δ	${}_2K_1'$	${}_3K_1$
4,95	7,00	3,71	-1,98	2,48	1,80	-1,15	0,65	-0,30
4,88	6,90	3,66	-2,08	2,58	1,00	-0,28	0,72	-0,35
4,86	6,87	3,64	-2,12 ¹⁾	2,62	0,70 ¹⁾	+0,04	0,74	-0,37 ¹⁾

Im allgemeinen ist der Vorgang wie beim vorhergehenden Beispiel, nur hat die Berechnung von ${}_2K_1$ und ${}_2K_2$ jetzt nach (13) zu erfolgen. Zum Beispiel folgt aus ${}_1K_2 = -1,98$ die $\sum \frac{KI}{l}$ für die Stäbe 1 und 4 zu $-\frac{1 \cdot 24\,690}{4,00} - \frac{1,98 \cdot 100\,000}{8,00} = -30\,930$ und hieraus ${}_2K_1 = +\frac{30\,930 \cdot 8,00}{100\,000} = +2,48$. Interpolation zwischen den beiden letzten Zeilen läßt eine Lösung bei etwa $\lambda_2 = 6,877$ erwarten. Da hierbei im Feld 1 und 2 je ein Knotenpunkt auftritt, handelt es sich um die zweite Oberschwingung.

Zusammenfassung: Mit Hilfe eines Diagrammes und weniger Formeln läßt sich die Frage nach den Grund- und Oberschwingungen von ebenen Stabwerken mit unverschieblicher Knotenfigur, deren Stäbe zwischen den Knoten einerlei Querschnitt und Massebelegung haben, in übersichtlicher Aufschreibung schnell und sicher erledigen.

Eingegangen: 13. Februar 48.

Die Momentbelastung des Halbraumes.

Von Gerh. Sonntag in Vohburg (Donau).

Ausgehend von den bekannten Lösungen der Belastung des Halbraumes durch eine Normal- bzw. Tangentialkraft wird die strenge Lösung abgeleitet für folgende Moment-Belastungen: Der Momentenvektor liegt I. in der Begrenzungsebene, und II. normal zur Begrenzungsebene des Halbraumes.

Proceeding from the well-known solutions of the load of a semi-infinite body caused by a perpendicular respectively a tangential force, it is possible to derive the exact solution: 1.) for the bending moment, the momental vector is to be found in the plane, and 2.) for the twisting moment, its vector is perpendicular to the plane limiting the semi-infinite body.

Partant des solutions connues de la charge d'un corps demi-infini, causée par une force perpendiculaire respectivement tangentielle du plan limitant, on dérive la solution exacte pour les charges des moments. Le vecteur représentatif du moment se trouve: 1°) dans le plan, 2°) à la perpendiculaire du plan limitant le corps demi-infini.

Исходя из известных решений для полупространства, нагруженного нормальной или касательной сосредоточенной силой, выводится строгое решение для следующих случаев нагрузки моментами: 1) изгибающим моментом, вектор которого лежит в граничной плоскости и 2) крутящим моментом, вектор которого направлен перпендикулярно к граничной плоскости.

Einleitung.

Unter dem Halbraum verstehen wir einen Körper von sehr großer Ausdehnung, der auf einer Seite durch eine Ebene begrenzt ist, die wir uns horizontal gerichtet denken wollen. In einem kleinen Teile, ungefähr in der Mitte dieser Begrenzungsfläche soll der Körper eine Belastung tragen; von äußeren Kräften greifen sonst nur noch die Auflagerkräfte an dem Körper an,

die an den sehr weit von der Angriffsstelle der Belastung entfernten und auch selbst sehr weit ausgedehnten Stützflächen auf ihn übertragen werden.

An Grundlösungen ist anscheinend nur der Spannungs- und Formänderungszustand infolge einer Einzellast normal zur Begrenzungsebene, der von Boussinesq [1]¹⁾ gefunden wurde, und weiter der einer Einzellast in der Begrenzungsebene des Halbraumes [2] bekannt²⁾. In dieser Arbeit soll nun der Spannungszustand bei einer Momentbelastung des Halbraumes aufgesucht werden³⁾.

Es gibt zwei Möglichkeiten, den Halbraum durch ein Moment zu belasten. Im ersten Fall liegt der Momentenvektor in der Begrenzungsebene des Halbraumes, im zweiten Fall steht er auf ihr senkrecht. Beide Spannungszustände sollen hier ermittelt werden.

I. Der Momentenvektor liegt in der Begrenzungsebene des Halbraumes.

Es soll der Spannungszustand bei Momentbelastung nach Bild 1 ermittelt werden. Der Momentenvektor liegt im Koordinatenanfangspunkt eines rechtwinkligen x, y, z -Koordinatensystems, dessen y, z -Ebene Begrenzungsebene des Halbraumes ist, in Richtung der positiven z -Achse.

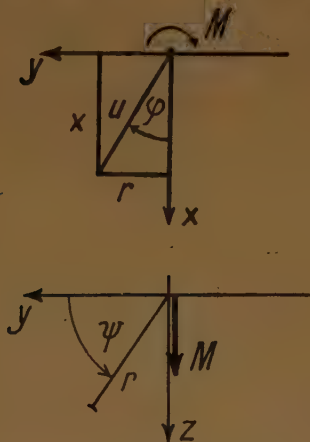


Bild 1.
I. Momentbelastung des Halbraumes.

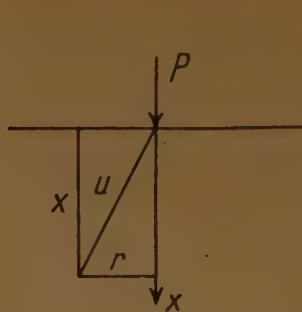


Bild 2a.
Normalbelastung des Halbraumes.

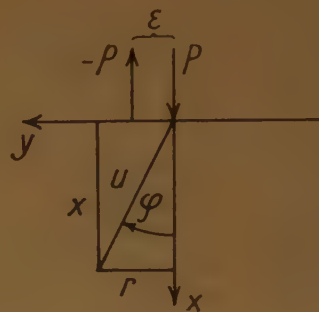


Bild 2b.

Für eine Einzellast senkrecht zur Begrenzungsebene des Halbraumes (Bild 2a) lautet der Spannungszustand nach Boussinesq [1] (m ist die Poissonsche Konstante, $u = \sqrt{x^2 + r^2}$)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{x^3}{u^5} \\ \sigma_r &= -\frac{P}{2\pi} \left[3 \frac{x r^2}{u^5} - \frac{m-2}{m} \cdot \frac{1}{u(x+u)} \right] \\ \sigma_t &= -\frac{P}{2\pi} \frac{m-2}{m} \left[\frac{1}{u(x+u)} - \frac{x}{u^3} \right] \\ \tau_{rx} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{x^2 r}{u^5} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

Wird zu der Einzellast P eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Last P im Abstand ϵ auf der y -Achse hinzugefügt, so erzeugt dieses Kräftepaar ein Moment $P \cdot \epsilon = +M$ und der Spannungszustand folgt aus der Überlagerung der aus beiden Lasten folgenden Spannungen (Bild 2b).

Werden nun die Lasten immer näher aneinander gerückt und gleichzeitig so vergrößert, daß der Wert $P \cdot \epsilon$ konstant bleibt, und macht man den Grenzübergang $\lim_{\substack{P \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} P \cdot \epsilon = +M$, so

folgen die Spannungen durch partielle Differentiation der Spannungen der Gl. (1) nach y [3]. Dieser Gedankengang soll am Beispiel σ_x gezeigt werden. Die aus beiden Lasten $+P$ und $-P$ resultierende Spannung $\sigma_{x_{\text{res}}}$ folgt aus

$$\sigma_{x(x, y, z)} - \sigma_{x(x, y - \epsilon, z)} = \sigma_{x_{\text{res}}}.$$

¹⁾ Die Zahlen beziehen sich auf die Literaturangabe am Ende der Arbeit.

²⁾ Wie vom Verfasser nachträglich festgestellt wurde, ließe sich die Momentbelastung des Halbraumes auch auffassen als Sonderfall: I. des Hohlkegels unter Momentbelastung seiner Spitze (H. Neuber: Forschung a. G. Ing. Wes. Bd. 14 (1934) S. 203) und II. der tordierten konischen Welle (O. B. Biezeno u. R. Grammel: Techn. Dynamik S. 304, Springer, Berlin 1939).

³⁾ Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. phil. L. Föppl, dem ich hiermit meinen verbindlichsten Dank ausspreche.

Es gilt bekanntlich

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma_x(x, y, z) - \sigma_x(x, y - \varepsilon, z)}{\varepsilon} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}$$

und damit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_{x \text{ res}} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \cdot \varepsilon.$$

Wird weiter $\lim_{\substack{P \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} P \cdot \varepsilon = M$ gesetzt, so ist mit $y = r \cdot \cos \psi$ und $z = r \cdot \sin \psi$ nach einfacher

Ausrechnung der gesuchte Spannungszustand für eine Momentbelastung nach Bild 1 bestimmt:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x^2 + r^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}. \\ \sigma_x &= 15 \frac{M}{2\pi} \frac{x^3}{u^7} \cdot r \cos \psi \\ \sigma_r &= \frac{M}{2\pi} \left[9 \frac{x}{u^5} - 15 \frac{x^3}{u^7} - \frac{m-2}{m} \left(\frac{x+2u}{(x+u)^2 u^3} \right) \right] r \cos \psi \\ \sigma_t &= \frac{M}{2\pi} \frac{m-2}{m} \left[\frac{x+2u}{(x+u)^2 u^3} - 3 \frac{x}{u^5} \right] r \cos \psi \\ \tau_{rx} &= \frac{M}{2\pi} \left[15 \frac{x^2 r^2}{u^7} - 3 \frac{x^2}{u^5} \right] \cos \psi \\ \tau_{rt} &= \frac{M}{2\pi} \left[3 \frac{x}{u^5} - \frac{m-2}{m} \left(\frac{x+2u}{(x+u)^2 u^3} \right) \right] r \sin \psi \\ \tau_{xt} &= +3 \frac{M}{2\pi} \frac{x^2}{u^5} \sin \psi \end{aligned} \quad (2).$$

Die Spannungen gelten unter Ausschluß der unmittelbaren Umgebung des Angriffspunktes des Momentes, wie es bei allen durch Einzellast hervorgerufenen Spannungszuständen der Fall ist.

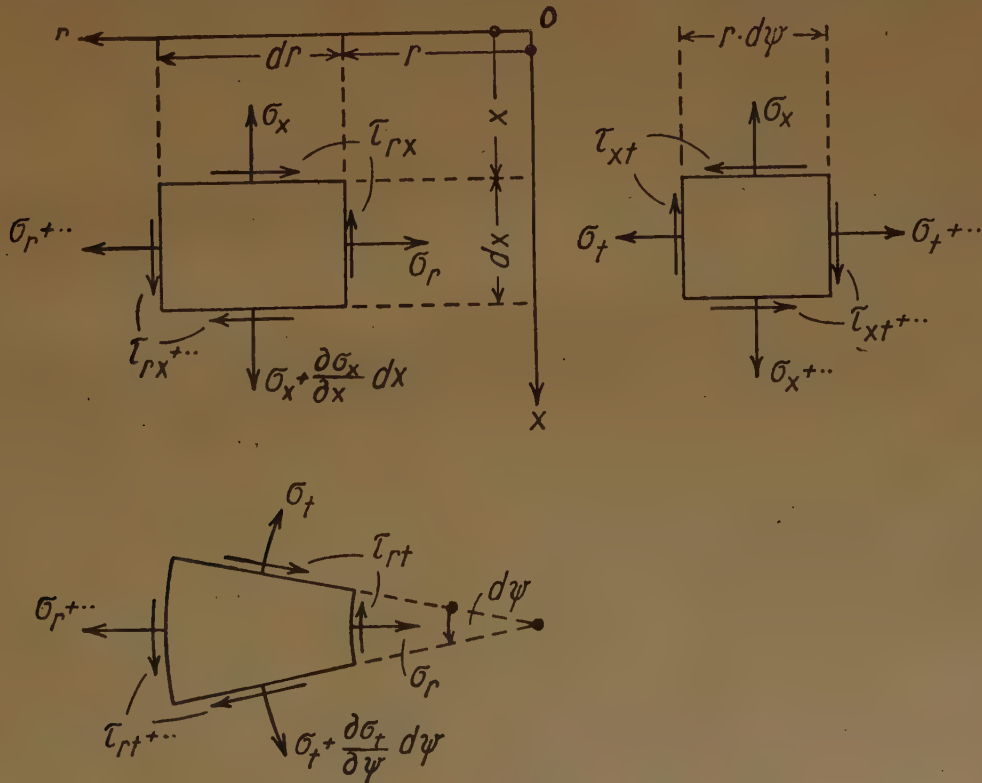


Bild 3. Spannungen an einem Element in Zylinderkoordinaten.

Da es sich nicht mehr um einen achsensymmetrischen Spannungszustand handelt, treten zu den Spannungen σ_x , σ_r , σ_t und τ_{rx} noch zwei weitere Schubspannungen τ_{rt} und τ_{xt} hinzu.

Sie sind in Gl. (2) der Vollständigkeit halber schon mit angeschrieben worden und es wird jetzt gezeigt, wie sie aus den Gleichgewichtsbedingungen am Element ermittelt wurden. Das Gleichgewicht an einem kleinen Element $r \cdot d\psi \cdot dr \cdot dx$ liest man aus Bild 3 ab:

$$\left. \begin{aligned} r \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial (r \cdot \tau_{rx})}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{xt}}{\partial \psi} &= 0 \\ \frac{\partial (r \cdot \sigma_r)}{\partial r} + r \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{rt}}{\partial \psi} - \sigma_t &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_t}{\partial \psi} + \frac{\partial (r \cdot \tau_{rt})}{\partial r} + r \frac{\partial \tau_{xt}}{\partial x} + \tau_{rt} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3).$$

τ_{xt} wird aus der ersten der Gl. (3) bestimmt, indem die nach Gl. (2) bekannten Spannungen σ_x und τ_{rx} eingesetzt werden:

$$\tau_{xt} = - \int \left[r \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial (r \cdot \tau_{rx})}{\partial r} \right] d\psi = + 3 \frac{M}{2\pi} \frac{x^2}{u^5} \sin \psi.$$

In gleicher Weise bestimmt sich τ_{rt} aus der zweiten der Gl. (3):

$$\tau_{rt} = \int \left[\sigma_t - r \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} - \frac{\partial (r \cdot \sigma_r)}{\partial r} \right] d\psi$$

nach einfacher Rechnung zu

$$\tau_{rt} = \frac{M}{2\pi} \left[3 \frac{x}{u^5} - \frac{m-2}{m} \left(\frac{2u+x}{(x+u)^2 u^3} \right) \right] r \cdot \sin \psi.$$

Zur Kontrolle kann man sich überzeugen, daß auch die dritte der Gl. (3) befriedigt ist.

Damit ist der Spannungszustand eindeutig bestimmt und nur der Vollständigkeit halber soll noch das Gleichgewicht an einem ∞ langen Zylinderschnitt um die x -Achse untersucht werden. Das Moment der am Zylindermantel angreifenden Spannungen τ_{rx} , τ_{rt} und σ_r muß Gleichgewicht halten mit dem auf der Begrenzungsebene eingeleiteten Moment.

$$M + 4 \int_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{\infty} [-\tau_{rx} \cdot r^2 \cos \psi d\psi dx + \sigma_r \cdot r x \cos \psi d\psi dx - \tau_{rt} \cdot r x \sin \psi d\psi dx] = 0.$$

Nach Einsetzen der Spannungen nach Gl. (2) und Ausführung der Integration über ψ , folgt:

$$M + \frac{M}{2} \int_0^{\infty} -6 \frac{x^2 r^2}{u^5} dx = M + \frac{M}{2} \left[+2 \frac{x r^2}{u^3} + \frac{2 r^2}{(x+u) u} \right]_{x=0}^{x=\infty} = 0.$$

Setzt man die obere Grenze $x=\infty$ ein und beachtet die Beziehung $u = \sqrt{x^2 + r^2}$, so wird der Ausdruck in der Klammer zu Null, da der Nenner von höherem Grade ∞ wird als der Zähler. Für $x=0$ wird $u=r$, und es folgt

$$M + \frac{M}{2} [-2] = 0 \quad \text{w. z. b. w.}$$

Es ist damit nachgewiesen, daß es sich tatsächlich um den gesuchten Spannungszustand für Momentbelastung nach Bild 1 handelt und es soll abschließend nur noch die Lösung nach Gl. (2) diskutiert werden.

Für einen volumenbeständigen Körper wird die Poissonsche Konstante $m=2$ und damit fallen die mit m behafteten Glieder fort, so daß die Tangentialspannung σ_t verschwindet und die Formeln für die übrigen Spannungen sehr vereinfacht werden. Für Gummi trifft dieser Sonderfall in guter Annäherung zu. In dieser Form lauten die Spannungen als Funktion von u , φ und ψ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M}{2\pi} \frac{15}{u^3} \sin \varphi \cos^3 \varphi \cos \psi \\ \sigma_r &= \frac{M}{2\pi} \frac{1}{u^3} (9 - 15 \cos^2 \varphi) \frac{\sin 2\varphi}{2} \cos \psi \\ \tau_{rx} &= \frac{M}{2\pi} \frac{1}{u^3} (15 \sin^2 \varphi - 3) \cos^2 \varphi \cos \psi \\ \tau_{rt} &= \frac{M}{2u} \frac{3}{u^3} \frac{\sin 2\varphi}{2} \sin \psi \\ \tau_{xt} &= + \frac{M}{2u} \frac{3}{u^3} \cos^2 \varphi \sin \psi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4).$$

Für $\psi = 0$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$ wird die Spannungsverteilung als Funktion von φ in Bild 4 dimensionslos dargestellt.

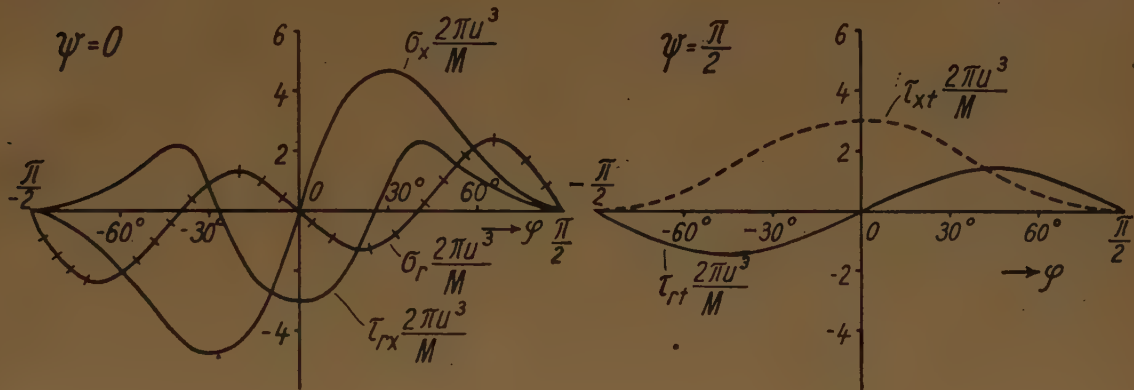


Bild 4. Spannungen in Schnitten $\psi = 0$ (Symmetrieschnitt) und $\psi = \frac{\pi}{2}$ für gleiche Abstände u vom Momentenangriffspunkt als Funktion vom Winkel φ : $m = 2$.

Alle Spannungen nehmen mit der dritten Potenz des Abstandes u ab, und ändern sich auf einem Kreis um die x -Achse $r = \text{const}$ mit $\cos \psi$ oder $\sin \psi$. Für $\psi = 0$ ist $\tau_{rt} = 0$ und $\tau_{xt} = 0$, wie es aus Symmetriegründen auch zu erwarten war. Die Spannungen σ_x , σ_r und τ_{rx} haben hier ihre Höchstwerte, die bei allen drei Spannungen mit wachsendem ψ im gleichen Verhältnis abnehmen und für $\psi = \frac{\pi}{2}$ zu Null werden.

τ_{rt} und τ_{xt} dagegen nehmen von $\psi = 0$ bis $\psi = \frac{\pi}{2}$ im gleichen Verhältnis zu und erreichen bei $\psi = \frac{\pi}{2}$ ihren Höchstwert, also an der Stelle wo alle anderen Spannungen verschwinden.

Die Winkel φ , an denen die Spannungen ein Maximum oder Minimum haben, sind aus Tafel 1 ersichtlich.

Tafel 1.

Die Spannung	verschwindet für	hat einen Höchstwert für	Höchstwert von der Größe $\left(A = \frac{M}{2\pi \cdot u^3}\right)$
σ_x	$\varphi = 0^\circ$ $\varphi = \pm 90^\circ$	$\varphi = \pm 30^\circ$	$\sigma_x = \pm A \cdot 4,87$
σ_r	$\varphi = \pm 39,3^\circ$ $\varphi = 0^\circ$ $\varphi = \pm 90^\circ$	$\varphi \approx \pm 20,5^\circ$ $\varphi \approx \pm 65,5^\circ$	$\sigma_r \approx \mp A \cdot 1,36$ $\sigma_r \approx \pm A \cdot 2,42$
τ_{rx}	$\varphi = \pm 26,6^\circ$ $\varphi = \pm 90^\circ$	$\varphi \approx \pm 42,1^\circ$ $\varphi = 0^\circ$	$\tau_{rx} \approx + A \cdot 2,06$ $\tau_{rx} = - A \cdot 3,00$
τ_{rt}	$\varphi = 0^\circ$ $\varphi = \pm 90^\circ$	$\varphi = \pm 45^\circ$	$\tau_{rt} = \pm A \cdot 1,50$
τ_{xt}	$\varphi = \pm 90^\circ$	$\varphi = 0^\circ$	$\tau_{xt} = + A \cdot 3,00$

Bemerkenswert ist, daß beim Fortschreiten in Richtung der x -Achse auf einer Geraden parallel zur x -Achse zuerst die Radialspannung σ_r und dann die Schubspannung τ_{rx} ihr Vorzeichen wechseln; σ_r verschwindet ungefähr an der Stelle wo τ_{rx} ihr Maximum hat. Direkt unter dem Angriffspunkt des Momentes, also für $r = 0$ bzw. $\varphi = 0$ werden nur Schubspannungen übertragen von der maximalen Größe $\tau_{(rx)} \varphi=0^\circ = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{3}{u^3}$.

Für diese Lösung der Beanspruchung des Halbraumes durch ein Moment ist praktische Bedeutung in der Erdbaumechanik zu erwarten. Es soll hier nur auf eine Arbeit von F. Vogt: Über die Berechnung der Fundamentdeformation, Oslo 1925, hingewiesen werden.

II. Der Momentenvektor steht normal auf der Begrenzungsebene.

Jetzt wollen wir uns der zweiten Art einer Momentbelastung des unendlichen Halbraumes zuwenden, bei der der Momentenvektor senkrecht auf der Begrenzungsebene steht nach Bild 5.

Für die Belastung des Halbraumes durch eine Scherkraft nach Bild 6 lautet der Spannungszustand [2].

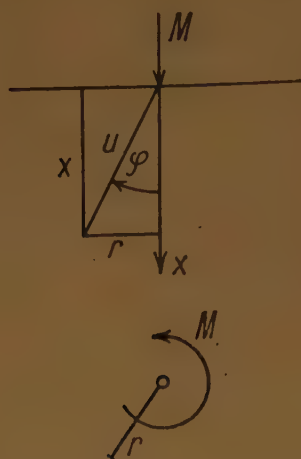


Bild 5. II. Momentbelastung des Halbraumes.

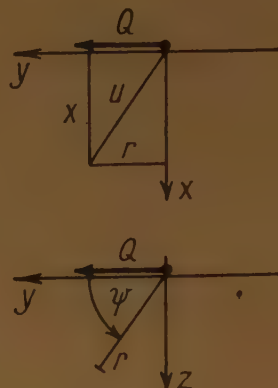


Bild 6. Belastung des Halbraumes durch Tangentialkraft.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= c \left[3 \frac{y^3}{u^5} - \frac{m-2}{m} \frac{y}{u^3} \left(1 - \frac{3u^2}{(x+u)^2} + y^2 \frac{x+3u}{(x+u)^3} \right) \right] \\ \sigma_z &= c \left[3 \frac{yz^2}{u^5} - \frac{m-2}{m} \frac{y}{u^3} \left(1 - \frac{u^2}{(x+u)^2} + z^2 \frac{x+3u}{(x+u)^3} \right) \right] \\ \sigma_x &= c \cdot 3 \frac{yx^2}{u^5} \\ \tau_{xz} &= c \left[3 \frac{y^2z}{u^5} + \frac{m-2}{m} \cdot \frac{z}{u(x+u)^2} \left(1 - y^2 \frac{x+3u}{u^2(x+u)} \right) \right] \\ \tau_{zx} &= c \cdot 3 \frac{xyz}{u^5} \quad \tau_{yx} = c \cdot 3 \frac{y^2x}{u^5} \quad \text{mit } c = -\frac{Q}{2\pi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5).$$

Wie im ersten Fall wird zur Einzellast Q eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft $-Q$ im Abstand ε auf der positiven z -Achse hinzugefügt. Nach Ausführung des Grenzüberganges $Q \rightarrow \infty \quad \varepsilon \rightarrow 0$ folgt durch partielle Differentiation der Gl. (5) nach z ein Spannungszustand nach Gl. (6):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y1} &= \frac{\partial \sigma_y}{\partial z} = c \left\{ -15 \frac{y^3z}{u^7} + \frac{m-2}{m} 3 \frac{yz}{u^3} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{x+3u}{(x+u)^3} + \frac{y^2}{(x+u)^2} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{2(x+2u)}{u(x+u)^2} \right) \right] \right\} \\ \sigma_{z1} &= \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = c \left\{ -15 \frac{yz^3}{u^7} + 6 \frac{yz}{u^5} + \frac{m-2}{m} 3 \frac{yz}{u^3} \left[\frac{1}{u^3} - \frac{x+3u}{(x+u)^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{z^2}{(x+u)^2} \left(\frac{1}{u^3} + \frac{2(x+2u)}{u(x+u)^2} \right) \right] \right\} \\ \sigma_{x1} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = -c \cdot 15 \frac{x^2yz}{u^7} \\ \tau_{(yz)1} &= \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = c \left\{ -15 \frac{y^2z^2}{u^7} + 3 \frac{y^2}{u^5} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m-2}{m} \left[\left(\frac{1}{u(x+u)^2} - z^2 \frac{x+3u}{u^3(x+u)^3} \right) \left(1 - y^2 \frac{x+3u}{u^2(x+u)} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{y^2z^2 \cdot 2}{u^2(x+u)^2} \left(\frac{1}{u^3} + \frac{x+2u}{u^3(x+u)^2} \right) \right] \right\} \\ \tau_{(zx)1} &= \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = c \left[-15 \frac{xyz^2}{u^7} + 3 \frac{xy}{u^5} \right] \\ \tau_{(xz)1} &= \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial z} = -c \cdot 15 \frac{xy^2z}{u^7} \end{aligned} \right\} (6).$$

Diese Spannungen schreiben wir in Polarkoordinaten unter Anwendung der Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_1} &= \sigma_{y_1} \cos^2 \psi + \sigma_{x_1} \sin^2 \psi + \tau_{(yz)_1} \cdot 2 \sin \psi \cos \psi \\ \sigma_{t_1} &= \sigma_{y_1} \sin^2 \psi + \sigma_{x_1} \cos^2 \psi - \tau_{(yz)_1} \cdot 2 \sin \psi \cos \psi \\ \sigma_{x_1} &= \sigma_{x_1} \\ \tau_{(rt)_1} &= (\sigma_{x_1} - \sigma_{y_1}) \sin \psi \cos \psi + \tau_{(yz)_1} (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \\ \tau_{(rx)_1} &= \tau_{(yx)_1} \cos \psi + \tau_{(zx)_1} \sin \psi \\ \tau_{(tx)_1} &= -\tau_{(yx)_1} \sin \psi + \tau_{(zx)_1} \cos \psi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7).$$

Diese Gleichungen geben noch nicht den Spannungszustand für die gegebene Momentbelastung an, es ist dazu noch erforderlich, unendlich viele Kräftepaare im Koordinatenanfangspunkt zu überlagern, die jeweils um einen kleinen Winkel $d\psi$ zueinander verdreht sind. Die gesuchte Spannung folgt dann aus

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \int_{\psi=0}^{\pi} \frac{\sigma_{r_1} \cdot r \cdot dr d\psi}{r \cdot \pi dr} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sigma_{r_1} d\psi; & \sigma_t &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sigma_{t_1} d\psi; & \sigma_x &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sigma_{x_1} d\psi \\ \tau_{rt} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tau_{(rt)_1} d\psi; & \tau_{rx} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tau_{(rx)_1} d\psi; & \tau_{tx} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tau_{(tx)_1} d\psi \end{aligned} \right\} \dots \dots (8).$$

Nach Einsetzen der Gl. (6) in die Gl. (7) und Durchführung der Integration nach Gl. (8) folgt ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 0; & \sigma_t &= 0; & \sigma_x &= 0; & \tau_{rx} &= 0; \\ \tau_{tx} &= +c \cdot \frac{3}{2} \frac{xr}{u^5}; & \tau_{rt} &= c \cdot \frac{3}{2} \frac{r^2}{u^5}. \end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis ergibt sich, wenn an Stelle der Integration nach Gl. (8) dem Spannungszustand nach Gl. (7) ein gleicher um $\psi = 90^\circ$ verdrehter Spannungszustand überlagert wird [3].

Zur Kontrolle soll noch das Gleichgewicht an einem kleinen Element nach Gl. (3) untersucht werden. Es muß die Gleichung

$$\frac{\partial (r \cdot \tau_{rt})}{\partial r} + r \frac{\partial \tau_{tx}}{\partial x} + \tau_{rt} = 0$$

erfüllt sein, und man überzeugt sich leicht, daß dies für die soeben gefundenen Spannungen τ_{rt} und τ_{tx} zutrifft.

Um die Konstante c zu bestimmen, mit der beide Schubspannungen behaftet sind, stellen wir die Gleichgewichtsbedingung auf für einen unendlich langen Zylinderschnitt um die x -Achse. Das Moment der in der Schnittfläche liegenden Spannungen, hier nur die Schubspannungen τ_{rt} und τ_{tx} , muß Gleichgewicht halten mit dem in der Begrenzungsebene eingeleiteten Drehmoment.

$$M + 4 \int_{x=0}^{\infty} \int_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}} \tau_{rt} \cdot r^2 dx d\psi = 0$$

daraus folgt die Konstante $c = -\frac{M}{2\pi}$. Der Spannungszustand ist also durch die beiden Schubspannungen τ_{tx} und τ_{rt} vollkommen bestimmt. Es ist bemerkenswert, daß in diesem Fall die Poissonsche Konstante m nicht auftritt, der Spannungszustand also vom Werkstoff unabhängig ist, wenn es sich nur um einen homogenen Werkstoff handelt.

$$\tau_{rt} = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{3}{2} \frac{\sin^2 \varphi}{u^3}; \quad \tau_{tx} = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{3}{4} \frac{\sin 2\varphi}{u^3} \dots \dots \dots (9).$$

In Bild 7 wurde diese Spannungsverteilung als Funktion von φ dimensionslos dargestellt. Beide Spannungen nehmen mit der dritten Potenz des Abstandes u ab. τ_{rt} erreicht an der Oberfläche der Begrenzungsebene, also für $\varphi = 90^\circ$ ihren Höchstwert von der

Größe $\tau_{rt} = -\frac{M}{2\pi u^3} \cdot 1,5$. Dagegen muß die Schubspannung τ_{xt} an der lastfreien Oberfläche verschwinden und sie hat ein Maximum für $\varphi = 45^\circ$ von der Größe $\tau_{xt} = -\frac{M}{2\pi u^3} \cdot 0,75$.

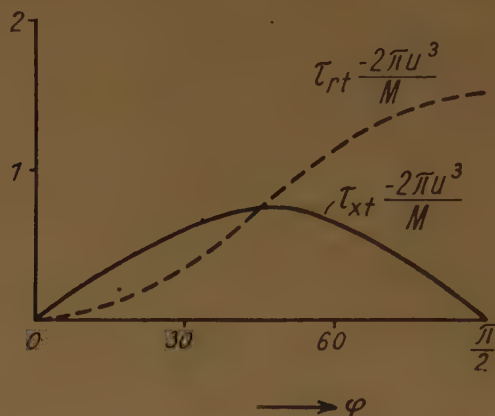


Bild 7. Spannungen für gleiche Abstände u vom Momentenzentrum als Funktion vom Winkel φ
($\varphi = \frac{\pi}{2}$ = Oberfläche des Halbraumes).

Beim Bohren wird dieser Spannungszustand in Überlagerung mit dem Spannungszustand für eine Einzellast normal zur Begrenzungsfläche angenähert zu erwarten sein.

Literaturverzeichnis.

- [1] A. u. L. Föppl: „Drang und Zwang“, eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure. 3. Aufl., Bd. 2, S. 198ff. R. Oldenbourg, München 1944.
- [2] F. Vogt: Über die Berechnung der Fundamentaldeformation, S. 21. Oslo 1925.
- [3] Love-Timpe: Lehrbuch der Elastizität. Teubner, Leipzig 1907.

Ein neues Verfahren zur Konstruktion von Trajektorien in Strömungsfeldern.

Von Hans Ertel in Berlin.

Die punktweise Konstruktion der Trajektorie einer zur Zeit $t=0$ in einem vorgegebenen Punkt (X_1, X_2, X_3) des Strömungsfeldes eintreffenden Flüssigkeitspartikel erfordert die Bestimmung der Koordinaten (a_1, a_2, a_3) dieser Flüssigkeitspartikel zu einer früheren Zeit $t = -\tau$. Es wird analytisch ein Gleichungssystem zur Bestimmung kleiner Koordinatendifferenzen $X_i - a_i$ ($i = 1, 2, 3$) abgeleitet, dessen Lösung durch ein sukzessives Approximationsverfahren erfolgt, das sich in eine graphische Methode zur punktweisen Trajektorienkonstruktion übertragen läßt.

The point for point construction of the trajectory relating to a particle of fluid that is arriving at the time $t=0$ at a given point (X_1, X_2, X_3) of the field of flow requires the determination of the coordinates (a_1, a_2, a_3) of the particle at a former time $t = -\tau$. Analytically, a system of equations is derived for the determination of little coordinate differences $X_i - a_i$ ($i = 1, 2, 3$). The system is solved by a method of successive approximations transformable into a graphical method for the point for point construction of the trajectory.

Pour construire point par point la trajectoire d'une particule de liquide arrivant à un temps $t = 0$ à un point (X_1, X_2, X_3) du champ d'écoulement, on doit déterminer les coordonnées de cette particule pour un temps précédent $t = -\tau$. Par analyse on dérive un système d'équations pour la détermination des petites différences de coordonnées $X_i - a_i$ ($i = 1, 2, 3$). On arrive à résoudre un système d'équations par une méthode d'approximations successives qu'on peut transformer en une méthode graphique servant à construire point par point la trajectoire.

Построение от точки до точки траектории частицы жидкости, прибывающей ко времени $t = 0$ в данную точку (X_1, X_2, X_3) потока, требует определения координаты (a_1, a_2, a_3) этой частицы жидкости в предшествующее время $t = -\tau$. Аналитически выводится система уравнений для определения небольших разностей координат $X_i - a_i$ ($i = 1, 2, 3$). Эта система уравнений решается методом последовательных приближений, который может быть преобразован в графический метод построения траектории от точки до точки.

I. Analytische Entwicklung eines Gleichungssystems zur Bestimmung kleiner Koordinatendifferenzen zweier Punkte einer Trajektorie.

Es sei x_i ($i = 1, 2, 3$) ein orthogonales kartesisches Koordinatensystem und P_0 ein fixer Punkt mit den Koordinaten X_i ($i = 1, 2, 3$) in einem nichtstationären Strömungsfeld. Eine zur Zeit $t=0$ in P_0 eintreffende Flüssigkeitspartikel möge zur früheren Zeit $t = -\tau$ einen Punkt P

mit den Koordinaten $x_i = a_i$ ($i = 1, 2, 3$) passiert haben. Es sind dann P_0 und P Punkte derselben Trajektorie, denen für ein hinreichend kleines Zeitintervall τ kleine Koordinatendifferenzen $X_i - a_i$ entsprechen. Fassen wir die a_i als Lagrangesche Numerierungskordinaten der Flüssigkeitspartikel auf, welche dieselbe für alle Zeiten $t \geq -\tau$ individuell charakterisieren, so gilt

$$\frac{da_i}{dt} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

unter $\frac{d}{dt}$ den individuellen Differentialoperator der Hydrodynamik

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (2)$$

mit den Geschwindigkeitskomponenten

$$\frac{dx_k}{dt} = v_k(x_1, x_2, x_3, t) \quad (3)$$

verstanden. Aus den Gleichungen (1) bis (3) folgt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) (x_i - a_i) = v_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (4)$$

($i = 1, 2, 3$). Wir setzen voraus, daß bei der Integration des Systems (4) für ein kleines Zeitintervall $-\tau \leq t \leq 0$ die v_k in (4) durch die Mittelwerte

$$V_k = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^0 v_k dt = \frac{X_k - a_k}{\tau} \quad (5)$$

der Geschwindigkeitskomponenten der Partikelbewegung von P nach P_0 zu ersetzen sind, so daß das System

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 V_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) (x_i - a_i) = v_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (6)$$

zu integrieren ist:

$$x_i - a_i = \int_{-\tau}^0 v_i \{ x_1 - V_1(0 - \xi), \dots, \xi \} d\xi \quad (7)$$

Für $t = 0$ wird $x_i = X_i$, und setzen wir

$$r_i = X_i - a_i \quad (8)$$

für die Koordinatendifferenzen der Punkte P und P_0 , so wird

$$r_i = \int_{-\tau}^0 v_i \{ X_1 - V_1(0 - \xi), \dots, \xi \} d\xi \quad (9),$$

woraus wir nach einer Taylor-Entwicklung des Integranden um den Raum-Zeit-Punkt $X_1, X_2, X_3, t = 0$ unter Beschränkung auf Terme 1. Ordnung erhalten:

$$r_i = \tau \left\{ 1 - \frac{\tau}{2} \left(\sum_{k=1}^3 V_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\} v_i(X_1, X_2, X_3, 0) \quad (10)$$

oder mit Rücksicht auf (5) und (8):

$$r_i = \tau \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^3 r_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\} v_i(X_1, X_2, X_3, 0) \quad (11),$$

wobei $X_1, X_2, X_3, t = 0$ nach vollzogenen Differentiationen einzusetzen sind. Das System (11) stellt ein lineares inhomogenes Gleichungssystem zur Bestimmung der r_i ($i = 1, 2, 3$) dar; wegen der Schwierigkeit einer sicheren Messung der Ableitungen $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ und $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ fassen wir zweckmäßiger die rechte Seite von (11) als Taylor-Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{\tau}{2} \left\{ v_i(X_1, \dots, 0) + v_i(X_1 - r_1, \dots, -\tau) \right\} \quad (12)$$

($i = 1, 2, 3$ für dreidimensionale, $i = 1, 2$ für zweidimensionale Stromfelder) konvergieren. Nun konvergieren die Reihen (21) wegen $0 \leq |\delta r_i^{(n)}| \leq |\delta r^{(n)}| = \delta r^{(n)}$ absolut, wenn die Reihe

$$\sum_0^\infty |\delta r^{(n)}| = \sum_0^\infty \delta r^{(n)} \dots \dots \dots (22)$$

konvergiert, was nach dem Cauchyschen Quotientenkriterium für

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta r^{(n)}}{\delta r^{(n-1)}} < 1 \dots \dots \dots (23)$$

der Fall ist. Andererseits folgt aus (18) und (19):

$$\delta r^{(n)} = -\frac{\tau}{2} (\delta r^{(n-1)} \text{ grad } v(\bar{r}, -\tau)) \dots \dots \dots (24)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$) mit den Komponenten

$$\delta r_i^{(n)} = -\frac{\tau}{2} \delta r^{(n-1)} |\text{grad } v_i| \cdot \cos(\delta r^{(n-1)}, \text{grad } v_i) \dots \dots \dots (25)$$

($v_i = v_i(\bar{r}, -\tau)$), woraus

$$\delta r^{(n)} \leq \frac{\tau}{2} \delta r^{(n-1)} \sqrt{\sum_1^3 (\text{grad } v_i)^2} \dots \dots \dots (26)$$

resultiert. Der Vergleich von (26) mit (23) ergibt dann die Konvergenzbedingung

$$\tau < \frac{2}{\sqrt{\sum_1^3 (\text{grad } v_i)^2}} \dots \dots \dots (27).$$

Der Nenner auf der rechten Seite ist ein Maß für die Inhomogenität des Stromfeldes $v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ zur Zeit $t = -\tau$ in der Umgebung des Punktes $\bar{r} = (X_1, X_2, X_3)$, und das Approximationsverfahren konvergiert also für ein um so größeres Zeitintervall $-\tau \leq t \leq 0$, je geringer die Inhomogenität des Stromfeldes ist. Für zweidimensionale (x_1, x_2) atmosphärische Strömungsfelder an der Erdoberfläche ist z. B.

$$\text{magn } |\text{grad } v_1| = \text{magn } |\text{grad } v_2| = 10^{-5} \text{ sec}^{-1} \quad \left[\text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right]$$

und daher das Konvergenz-Zeitintervall von der Größenordnung eines Tages.

III. Graphische Methode der punktweisen Trajektorienkonstruktion.

Die Aufgabe, vom vorgegebenen Endpunkt P_0 ($t = 0$) ausgehend den vorher zur Zeit $t = -\tau$ durchlaufenen Punkt P der Trajektorie zu ermitteln, kann mittels der Approximationsgleichungen (18) graphisch folgendermaßen gelöst werden:

Gegeben sei das Stromfeld in der Umgebung des Punktes P_0 zur Zeit $t = -\tau$, also das Feld $v(x_1, x_2, x_3, -\tau)$, so daß für jeden Feldpunkt Richtung und Absolutbetrag der Geschwindigkeit bekannt sind. Der Einfachheit halber sei das Stromfeld von der Art, daß das Verfahren für $\tau = 1$ konvergiere, anderenfalls ist in den folgenden Ausführungen überall v durch τv zu ersetzen. In dieses Feld übertragen wir den Vektor $v(\bar{r}, 0)$ (Bild 2) und bilden nach (18) für $\tau = 1$

$$r^{(1)} = \frac{1}{2} \{ v(\bar{r}, 0) + v(\bar{r}, -\tau) \}$$

($= \overrightarrow{P_0 A_1}$), indem wir P_0 mit der Mitte der Verbindungslinie der Endpunkte der Vektoren $v(\bar{r}, 0)$ und $v(\bar{r}, -\tau)$ verbinden. Rückwärtsverschiebung dieses Vektors $r^{(1)}$ um seinen Absolutbetrag führt auf den Punkt $P_1 (= \bar{r} - r^{(1)})$,

und der dortige Geschwindigkeitsvektor $\overrightarrow{P_1 B_1} = v(\bar{r} - r^{(1)}, -\tau)$, durch Parallelverschiebung in die Lage $P_0 B_1$ gebracht, liefert analog die zweite Näherung.

$$r^{(2)} = \frac{1}{2} \{ v(\bar{r}, 0) + v(\bar{r} - r^{(1)}, -\tau) \}$$

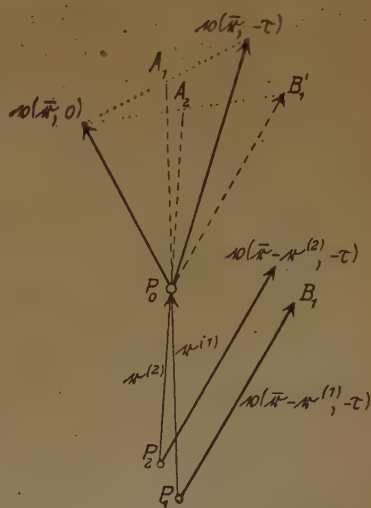


Bild 2.

($= \overrightarrow{P_0 A_2}$), die durch Rückwärtsverschiebung um ihren Absolutbetrag den Punkt $P_2 (= \bar{r} - r^{(2)})$ liefert. Stimmt nun der dortige Geschwindigkeitsvektor $v(\bar{r} - r^{(2)}, -\tau)$ innerhalb der Zeichnungsgenauigkeit mit $v(\bar{r} - r^{(1)}, -\tau)$ überein, so ist die Approximation ersichtlich abgeschlossen und P_2 der gesuchte, zur Zeit $t = -\tau$ durchlaufene Trajektorienpunkt. Anderenfalls ist das Verfahren bis zu einem Punkt P_n fortzusetzen, dessen Lage innerhalb der Zeichnungsgenauigkeit mit dem Nachbarpunkt P_{n-1} zusammenfällt. Die Konvergenz des Verfahrens drückt sich bei dieser graphischen Methode sehr anschaulich dadurch aus, daß die Anfangspunkte $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ der Vektoren $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}, \dots, r^{(n)}$ den gesuchten Anfangspunkt P des Vektors $r = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{(n)}$ immer enger einschließen.

Die Trajektorie zwischen den Punkten P und P_0 ist durch eine Kurve gegeben, deren Tangentenrichtung in P mit der Richtung des dortigen Geschwindigkeitsvektors $v(\bar{r} - r, -\tau)$ zur Zeit $t = -\tau$ und in P_0 mit der Richtung der dortigen Geschwindigkeit $v(\bar{r}, 0)$ zur Zeit $t = 0$ (vgl. Bild 1) übereinstimmt (Lit. [2]).

Ohne analytische Begründung, lediglich auf Grund elementarer Überlegungen hat J. J. George (Lit. [3]) ein Verfahren zur graphischen Trajektorienkonstruktion vorgeschlagen, welches in Untersuchungen amerikanischer Meteorologen bereits Anwendung gefunden hat (Lit. [4]) und das (in unserer Bezeichnungsweise) auf der Formel

$$r = \frac{\tau}{2} \{ v(r, 0) + v(\bar{r} - \tau v(\bar{r}, 0), -\tau) \}$$

beruht, die sich aber als 2. Näherung unserer Approximationsgleichungen (18) für den Fall einer in P_0 stationären Strömung $v(\bar{r}, 0) = v(\bar{r}, -\tau)$ auffassen läßt:

$$r^{(1)} = \frac{\tau}{2} \{ v(\bar{r}, 0) + v(\bar{r}, -\tau) \} = \tau v(\bar{r}, 0),$$

$$r^{(2)} = \frac{\tau}{2} \{ v(\bar{r}, 0) + v(\bar{r} - r^{(1)}, -\tau) \},$$

so daß die Georgesche Konstruktion einen Spezialfall des hier entwickelten Verfahrens darstellt.

Literatur.

- [1] H. Ertel: Eine Methode zur approximativen Vorausberechnung von Luftmassenverlagerungen. Abh. Dt. Akad. d. Wiss. Berlin 1948.
- [2] O. Tietjens: Hydro- und Äromechanik nach Vorlesungen von L. Prandtl, I. Bd., S. 67f. Berlin 1929.
- [3] J. J. George: Bull. American. Met. Soc., Vol. 21, S. 147. Milton (Mass.) 1940.
- [4] R. H. Cunningham: Ebenda, Vol. 22 (1941), S. 17.

Eingegangen 14. 2. 1948.

KLEINE MITTEILUNGEN

Zwei Hilfssätze aus der Kombinatorik.

Im folgenden werden zwei Formeln der Kombinatorik mitgeteilt, die nicht bekannt zu sein scheinen, aber für die Behandlung einiger Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik von Nutzen sind. Beispiele dafür sind u. a. Untersuchungen über Iterationen (Folgen gleicher Merkmale) in einer Beobachtungsfolge und solche Anwendungen, für die man sich das Modell eines Rencontrespiels machen kann. Weitere Hinweise folgen am Schluß.

I. Gegeben ist eine Strecke, die in n gleiche Teile geteilt ist. Die Einteilungspunkte seien unterscheidbar und mit $0, 1, 2, \dots, n$ bezeichnet. Auf wievielfache Weise kann man k nicht unterscheidbare, l Einheiten lange Strecken so auf die gegebene Strecke verteilen, daß die Endpunkte jeder der k verteilten Strecken mit Einteilungspunkten zusammenfallen und keine Überdeckungen stattfinden (l ganzzahlig)? Die gesuchte Anzahl sei $S_k^{(n)}$.

II. Gegeben ist ein Kreis, dessen Umfang in n gleiche Teile geteilt ist. Die Einteilungspunkte seien unterscheidbar und mit $1, 2, 3, \dots, n$ bezeichnet. Auf wievielfache Weise kann man k nicht unterscheidbare, l Einheiten lange Kreisbögen vom gleichen Radius wie der gegebene Kreis so auf diesen verteilen, daß die Endpunkte jedes der k verteilten Kreisbögen mit

Einteilungspunkten zusammenfallen und keine Überdeckungen stattfinden (l ganzzahlig)? Die gesuchte Anzahl sei $Z_k^{(n)}$.

Zum Beweis der Formel I sei $S_{k-1}^{(n)}$ bereits bekannt. Man erhält dann alle möglichen Anordnungen von k Strecken, indem man eine Strecke auf $[n-l \dots n]$ legt und die anderen $(k-1)$ Strecken auf $[0 \dots n-l]$ verteilt ($S_{k-1}^{(n-l)}$ Möglichkeiten), indem man ferner die k -te Strecke auf $[n-l-1 \dots n-1]$ legt und die anderen $(k-1)$ Strecken auf $[0 \dots n-l-1]$ verteilt ($S_{k-1}^{(n-l-1)}$ Möglichkeiten), usw. So ergibt sich

$$S_k^{(n)} = S_{k-1}^{(n-l)} + S_{k-1}^{(n-l-1)} + \dots + S_{k-1}^{(0)}$$

und daraus die partielle Differenzengleichung

$$S_k^{(n)} - S_k^{(n-1)} = S_{k-1}^{(n-l)}.$$

Als Randbedingungen darf man wählen

$$S_0^{(n)} = 1 \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

und

$$S_k^{(n)} = 1 \quad \text{für} \quad \begin{cases} n = tl \\ k = t \end{cases} \quad \text{mit} \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

So folgt das Ergebnis

$$S_k^{(n)} = \binom{n-kl+k}{k}.$$

Bei geeigneter Definition der Binominalzahlen ist insbesondere

$$S_k^{(n)} = 0 \quad \text{für} \quad n = 0, 1, \dots, kl-1.$$

Die Berechnung von $Z_k^{(n)}$ läßt sich leicht auf die von $S_k^{(n)}$ zurückführen. Es ist

$$Z_k^{(n)} = l \cdot S_{k-1}^{(n-l)} + S_k^{(n-1)}.$$

Denn man kann entweder ein Kreisbogenstück auf l -fache Weise so legen, daß $[n \dots 1]$ bedeckt ist, und die übrigen $(k-1)$ Bogenstücke auf $S_{k-1}^{(n-l)}$ -fache Weise auf den restlichen $n-l$ Einheiten langen Bogen verteilen oder kann $[n \dots 1]$ unbedeckt lassen und die k -Bogenstücke auf $S_k^{(n-1)}$ -fache Weise auf den restlichen $(n-1)$ Einheiten langen Bogen verteilen.

In einer in dieser Zeitschrift (Bd. 1 [1921], 298—307) erschienenen Arbeit „Das Problem der Iterationen“ hatte R. v. Mises gezeigt, daß Iterationen von hinreichender Länge „seltene“ Ereignisse im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind, ihre Anzahl also dem Poissonschen Verteilungsgesetz folgt. Die dort eingeführte Zahl z_p entspricht dem hier eingeführten $Z_k^{(n)}$, wenn ν gleich k gesetzt wird. Die Abschätzung der Größe z_p wird entbehrlich, da nunmehr ein expliziter Ausdruck bekannt ist. Überdies ist auch die zyklische Anordnung der Beobachtungen dort unnötig, so daß mit $S_k^{(n)}$ gearbeitet werden kann. So entsteht eine beträchtliche Verkürzung des Beweisganges. Gleiches gilt für eine Arbeit des Verfassers (G. Schulz, Über eine für die Statistik wichtige Verallgemeinerung des Rencontrespiels, Sitz.-Ber. d. Berliner Math. Ges. 38/39 [1940], 73—83).

Die mitgeteilten Formeln erlauben ferner die Beantwortung einer großen Reihe verwandter Fragen. Zum Beispiel: In der Folge der Zahlen $1, 2, \dots, n-1, n$ kann man auf $\binom{n-k+1}{k}$ -fache Weise k Zahlen markieren, so daß niemals zwei benachbarte Zahlen markiert sind. (Vgl. G. Schulz, Aufgabe 319, Jahresber. d. DMV 52 [1942], 69 kursiv.)

Weitere Anwendungen liegen vor bei statistischen Untersuchungen der Höhenstrahlenforschung (Theorie der Registrierinstrumente, die nach einer Registrierung für eine kurze Zeit gesperrt sind, Beobachtungen von Zählrohrkoinzidenzen) sowie des Fernsprechverkehrs, wobei die Strecken die zeitliche Belegung von Leitungen mit Gesprächen bedeuten.

Aachen.

Günther Schulz.

Vereinfachtes Kriterium für Hurwitzsche Gleichungen sechsten Grades.

Bildet man in einem orthogonalen, rechtsorientierten kartesischen (x, y, z) -Koordinatensystem aus den Koeffizienten einer reellen algebraischen Gleichung sechsten Grades:

$$f(u) \equiv a_0 u^6 + a_1 u^5 + \dots + a_6 = 0 \quad \text{mit} \quad a_0 > 0 \quad (1)$$

die drei Vektoren

$$\mathfrak{A} \equiv (a_1, a_3, a_5), \quad \mathfrak{B} \equiv (b_1, b_3, b_5), \quad \left. \begin{array}{l} \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C} \equiv (c_1, c_3, c_5) \end{array} \right\} \quad (2),$$

wobei

$$b_1 \equiv a_1 a_2 - a_0 a_3, \quad b_3 \equiv a_1 a_4 - a_0 a_5, \quad b_5 \equiv a_1 a_6 \quad (3)$$

gesetzt wird, so ist, wie ich vor einigen Jahren in dieser Zeitschrift (Bd. 21 (1941), S. 96—102) bewies, (1) dann und nur dann eine Hurwitzsche Gleichung, wenn für

die Komponenten der Vektoren (2) die Vorzeichenrelationen

\mathfrak{A}	+	+	+
\mathfrak{B}	+	+	+
\mathfrak{C}	—	+	—

(4)

gelten und überdies der Produktvektor \mathfrak{C} im Innern des elliptischen Kegels

$$\mathfrak{R}: xz - y^2 = 0 \quad (5)$$

liegt, also die Ungleichung

$$c_1 c_5 - c_3^2 > 0 \quad (6)$$

besteht.

Diese geometrische Formulierung des Hurwitzschen Satzes legte ein a. a. O. mitgeteiltes graphisches Verfahren nahe, welches sich gegenüber der numerischen Methode, insbesondere bei variablen Koeffizienten, durch geringeren Aufwand auszeichnete. Während der Nachweis von (4) ohne weiteres sich auf Millimeterpapier erledigte, erforderte der zweite Teil, die Verifizierung der Ungleichung (6), ein besonders vorbereitetes Konstruktionsblatt, in welches die durch Inversion am Nebenscheitelpunkt einer Ellipse K (definiert als Schnitt des Kegels \mathfrak{R} mit einer unter $\pi/4$ gegen Grund- und Aufrißebene geneigten, nicht durch den Koordinatenursprung O gehenden Ebene \mathfrak{S}) entstehende bizirkuläre Kurve vierter Ordnung und ihre drei Risse eingezeichnet waren. In einer brieflichen Mitteilung vom 31. 3. 48 wies mich Herr Prof. Willers freundlicherweise darauf hin, daß man sich von dieser Beschränkung frei machen kann und durch bloße Benutzung elementarer Konstruktionsmittel aus der darstellenden Geometrie zum Ziele gelangt. Darnach gestaltet sich der Nachweis für das Erfülltsein von (4) und (6) jetzt äußerst einfach:

Man trage in Auf-, Grund- und Seitenriß die Projektionen \mathfrak{A}' , ..., \mathfrak{B}''' der beiden Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ein, um die zu (4) äquivalenten Ungleichungen $0 < \beta_p < \alpha_p < \frac{\pi}{2}$ nachzuprüfen (Bild 1). Ferner zeichne man den sich als Kreis darstellenden Aufriß K'' der Schnittellipse K des Kegels \mathfrak{R} mit der Ebene \mathfrak{S} , sowie deren Seitenriß $S''' = K'''$. Der Vektor \mathfrak{C} , welcher in O

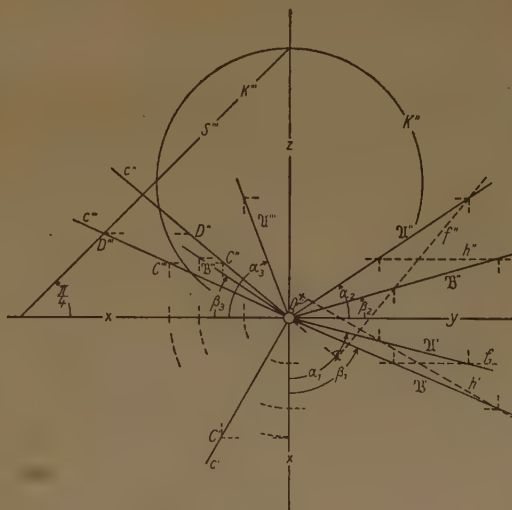


Bild 1.

senkrecht auf der durch \mathfrak{A} und \mathfrak{B} bestimmten Ebene \mathfrak{S} steht, liegt genau dann im Innern von \mathfrak{R} , wenn der Durchstoßpunkt $D \equiv (D', D'', D''')$ seiner Trägergeraden $c \equiv (c', c'', c''')$ mit der Ebene \mathfrak{S} innerhalb K , also D'' auf S''' und D' innerhalb K'' liegt.

Die Grundrißprojektion c' von c steht senkrecht zu der Grundrißprojektion h' einer Höhenlinie h der Ebene \mathcal{E} und analog die Aufrißprojektion c'' senkrecht zu der Aufrißprojektion h'' einer Frontlinie f . Auf c wähle man einen beliebigen Punkt $O \neq O$ und konstruiere aus C' und C'' seine Seitenprojektion C''' und den Seitenriß c''' . Der Schnittpunkt D''' von S''' mit c''' bestimmt den Seitenriß des Durchstoßpunktes D von c und \mathcal{E} ; damit ist auch sein Aufriß D'' bekannt. Liegt D'' innerhalb von K'' , so ist (1) eine Hurwitzsche Gleichung, andernfalls nicht.

Freiburg i. Br.

Herbert Bilharz

Über elliptische Integrale.

Bei der Bearbeitung von Elastizitätsproblemen kam ich auf Beziehungen zwischen elliptischen Integralen, die ich hier mitteilen möchte. Ich bitte meine verehrten Leser, mir durch eine Zuschrift in dieser Zeitschrift anzugeben, wo sich die betreffenden Beziehungen befinden.

Ich wähle zwei Winkel φ und ψ , zwischen Null und $\pi/2$, für die folgende Beziehung besteht:

$$\cotg \varphi \cotg \psi = \sqrt{1 - k^2} \quad \dots \quad (1)$$

Durch diese Gleichung ist ψ als Funktion von φ gegeben.

Es wird

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\frac{\cotg \psi}{\sin^2 \psi}}{\frac{\cotg \varphi}{\sin^2 \varphi}} = - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\sin \varphi \cos \varphi} \quad \dots \quad (2)$$

und

$$k^2 = 1 - \cotg^2 \varphi \cotg^2 \psi = \frac{\sin^2 \varphi + \sin^2 \psi - 1}{\sin^2 \varphi \sin^2 \psi} \quad \dots \quad (3)$$

Nunmehr bilden wir für diese beiden Winkel die elliptischen Integrale und auch das vollständige elliptische Integral erster Gattung für den Modul k . Dann besteht folgende Beziehung:

$$F(\varphi, k) + F(\psi, k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \quad \dots \quad (4)$$

Die Richtigkeit wird durch Differentiation der Gl. (4) bewiesen. Auf der rechten Seite steht eine Konstante. Wir erhalten

$$\frac{F(\varphi, k)}{\partial \varphi} + \frac{F(\psi, k)}{\partial \psi} \frac{d\psi}{d\varphi} = 0 \quad \dots \quad (5)$$

oder:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\sin \varphi \cos \varphi} = 0$$

Setzen wir k^2 nach Gl. (3) ein, so folgt hieraus die Richtigkeit der Gl. (5). Um hieraus auch die Richtigkeit der Gl. () zu folgern, muß diese Gl. für ein zusammengehörendes Wertepaar φ, ψ stimmen. Das ist auch der Fall für $\varphi = 0, \psi = \frac{\pi}{2}$.

Für die Winkel φ und ψ nach Gl. (1) besteht eine entsprechende Beziehung auch für die elliptischen Integrale zweiter Gattung. Diese Beziehung lautet:

$$E(\varphi, k) + E(\psi, k) - k^2 \sin \varphi \sin \psi = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \quad (6)$$

Die Beziehung stimmt für das Wertepaar $\varphi = 0, \psi = \frac{\pi}{2}$.

Durch Differentiation erhalten wir weiter:

$$\left. \begin{aligned} &\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - k^2 \cos \varphi \sin \psi \\ &- \left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} - k^2 \cos \psi \sin \varphi \right) \frac{\sin \psi \cos \psi}{\sin \varphi \cos \varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Setzt man wieder k^2 nach Gl. (3) ein, so folgt die Richtigkeit der Gl. (7) und hieraus der Gl. (6).

(b) Schlewecke über Bockenem. C. Weber.

Das Horner'sche Schema für komplexe Argumente.

Das Wesen des Horner'schen Schemas. In den Beschreibungen des Horner'schen Schemas fehlt stets die Begründung seiner Notwendigkeit. Diese ist nicht zu suchen in einer Vorliebe für schematische Vorschriften, sondern in seiner Arbeitersparnis.

Nehmen wir nämlich das Polynom $f(x) \equiv a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ und nehmen wir zunächst reelle Argumente. Dann geschieht die „gewöhnliche“ Ausrechnung mittels Berechnung der Potenzen von x . Jede solche Potenz erfordert vermöge $x^{i+1} = x \cdot x^i$ eine Multiplikation, im ganzen also $n-1$ Multiplikationen. Hinzu kommen die Multiplikationen mit den a_i , also n Stück. Total demnach $2n-1$ Multiplikationen. Dann hat man noch eine Summe von $n+1$ Summanden zu berechnen, also n Additionen. Die Berechnung mittels des Horner'schen hingegen kostet nur n Multiplikationen und n Additionen.

Noch vorteilhafter als bei reellen Argumenten ist das modifizierte Schema für komplexe Argumente¹⁾. Will man hier den Wert $f(x_0)$, wo $x_0 = u + iv$, auf gewöhnliche Weise feststellen, so erfordert jede Potenz wegen $x^{i+1} = x \cdot x^i$ vier Multiplikationen und zwei Additionen. Hinzu kommen die Multiplikationen mit den reellen Faktoren a_i , deren jeder zwei Multiplikationen kostet, so daß wir im ganzen $4(n-1) + 2n = 6n-4$ Multiplikationen haben. Und ähnlich $2(n-1) + 2n + 1 = 4n-1$ Additionen. — Rechnet man aber nach dem modifizierten Schema, so hat man bekanntlich, wenn \bar{x}_0 den konjugiert-komplexen Wert von x_0 bezeichnet, $f(x)$ durch die quadratische Funktion

$$h(x) \equiv (x - x_0)(x - \bar{x}_0) = x^2 - (x_0 + \bar{x}_0)x + x_0 \bar{x}_0,$$

also

$$h(x) = x^2 - 2ux + (u^2 + v^2)$$

zu dividieren. Das zugehörige bekannte Schema erfordert $2n-2$ Multiplikationen, und $2n-2$ Additionen, wie man sofort feststellt.

Somit haben wir als

Ergebnis. 1. Bei reellen Argumenten bedeutet das Horner'sche Schema etwa die halbe Arbeitersparnis.

2. Bei komplexen Argumenten hat man sogar nur ein Drittel der gewöhnlichen Arbeit zu leisten.

Berechnung der Ableitung $f'(x)$ bei komplexen Argumenten. Im folgenden soll es sich nur um komplexe Argumente handeln. Die einmalige Division von $f(x)$ durch $h(x)$ hat die neue Koeffizientenreihe $b_n, b_{n-1}, \dots, b_2, b_1, b_0$. Sie liefert Quotienten und Rest dieser Division, d. h. es ist

$$f(x) = (b_n x^{n-2} + \dots + b_3 x + b_2) \cdot h(x) + (b_1 x + b_0),$$

kurz:

$$f(x) = q_1(x) \cdot h(x) + (b_1 x + b_0) \quad \dots \quad (1),$$

so daß wegen $h(x_0) = 0$:

$$f(x_0) = b_1 x_0 + b_0.$$

Zur Berechnung der Korrektur $-f(x_0)/f'(x_0)$ bei der Newton'schen Näherungsmethode hat man nun auch den Wert der Ableitung $f'(x_0)$ nötig. Es ist wiederum nicht zweckmäßig, erst die Ableitung $f'(x)$ explizit zu bilden und dann mittels Horner $f'(x_0)$ auszurechnen. Denn dies würde $n-1$ Multiplikationen zur Bildung von $f'(x)$ und sodann $2n-4$ Multiplikationen zur Bildung von $f'(x_0)$ erfordern, im ganzen

¹⁾ L. Collatz, Z. angew. Math. Mech. 20 (1940) 235—236.

also $3n-5$ Multiplikationen, während die unten beschriebene Art nur $2n-2$ Multiplikationen kostet.

Man dividiert nämlich $q_1(x)$ wiederum durch $h(x)$ und bekommt die Koeffizientenreihe c_n, \dots, c_2 , so daß

$$q_1(x) = q_2(x)h(x) + (c_3x + c_2),$$

wo

$$q_2(x) = c_n x^{n-4} + \dots + c_5 x + c_4.$$

Damit wird

$$f(x) = q_2(x) \cdot h^2 + (c_3x + c_2) \cdot h + (b_1x + b_0) \quad (2),$$

also wegen $h(x_0) = 0$:

$$f'(x_0) = (c_3x_0 + c_2) \cdot h'(x_0) + c_1.$$

Nun ist aber $h'(x_0) = 2iv$, also

$$f'(x_0) = (c_3x_0 + c_2) \cdot 2iv + b_1 \dots \quad (3).$$

Die Bestimmung der Koeffizienten c_i erfordert nun $2n-6$ Multiplikationen. Hinzu kommen die vier Multiplikationen, die nötig sind für (3). Im ganzen kostet $f'(x_0)$ demnach $2n-2$ Multiplikationen.

Die Taylorsche Entwicklung für komplexe Argumente. Offenbar kann man hier ähnlich vorgehen wie im Horner'schen Schema für reelle Argumente und damit das Polynom in der Umgebung von x_0 in eine Taylorsche Reihe entwickeln. Dazu müssen wir

die sukzessiven Ableitungen $\frac{1}{i!} D^i f(x_0)$ bilden.

Führen wir allgemein die Division durch $h(x)$ im ganzen $i+1$ mal aus, so bekommen wir die linearen Reste l_0, l_1, \dots, l_i , wo

$$l_k \equiv A_k x + B_k,$$

und den Quotienten $q_{i+1}(x)$ vom Grade $n-2(i+1)$. Und wir haben die Entwicklung nach Potenzen von $h(x)$:

$$f = q_{i+1} h^{i+1} + l_i h^i + l_{i-1} h^{i-1} + \dots + l_1 h + l_0$$

Bilden wir jetzt die i -te Ableitung D^i , so fallen auf der rechten Seite natürlich alle Glieder weg, welche vor der Differentiation von niedrigerem Grade als dem i -ten sind, so daß

$$D^i f = D^i (q_{i+1} h^{i+1} + l_i h^i + \dots + l_j h^j),$$

wobei

$$i+1 > 2j \geq i-1.$$

Dieser Ausdruck muß an der Stelle x_0 berechnet werden. Dabei kann zunächst der Term $q_{i+1} h^{i+1}$ außer Betracht bleiben, da er nach i -maliger Differentiation den Faktor h besitzt und da $h(x_0) = 0$. Somit haben wir noch

$$\begin{aligned} D^i f(x_0) &= D^i (l_i h^i + \dots + l_j h^j)_{x=x_0} \\ &= \sum_{k=j}^i l_k \cdot D^i (h_0^k) + i \sum_{k=j}^{i-1} l'_k \cdot D^{i-1} (h_0^k), \end{aligned}$$

denn wegen der Linearität der l_k verschwinden alle höheren Ableitungen als die erste. Ferner fällt in der zweiten Summe der Summand für $k=i$ weg, weil der Grad von h_0 höher ist als die Ordnung des Differenzierens und daher nach der Differentiation alle Glieder den Faktor $h_0=0$ haben.

Wir haben also allgemein den Ausdruck

$$D^m (h^k) = D^m (h \cdot h \dots h) \text{ für } m \leq k$$

an der Stelle x_0 zu bestimmen. Das gibt symbolisch

$$(h_1 + h_2 + \dots + h_k)^m.$$

Wegen $h(x_0) = 0$ können wir in dieser Entwicklung alle Glieder weglassen, die nach der Differentiation den Faktor h haben und nur diejenigen Glieder bei-

behalten, bei denen jedes h mindestens einmal und natürlich höchstens zweimal differenziert ist. Für das symbolische Polynom bedeutet dies, daß wir nur solche Glieder beizubehalten brauchen, in denen sämtliche h_i vorkommen, und zwar höchstens in zweiter Potenz. Für $m=k$ ist dies nur auf eine einzige Weise möglich, nämlich im Produkt $h_1 h_2 \dots h_k$. Daher ist

$$D^m (h_0^m) = m! H^m, \text{ wo } H = h'_0 = 2iv \dots \quad (4).$$

Für $m = k + p > k$ jedoch müssen p der Größen h_i zweimal differenziert werden (d.h. symbolisch im Quadrat vorkommen) und die übrigen $k-p$ nur einmal. Wir bekommen also das Glied $(h_0'')^p (h_0)^{k-p} = 2^p H^{k-p}$ mit dem Polynomialfaktor $m!/2^p$. Somit wird stets

$$D^m (h_0^k) = m! H^{2k-m}, \text{ wo } 2k \geq m \geq k \dots \quad (5).$$

Damit bekommen wir

$$D^i f(x_0) = i! \sum_{k=j}^i l_k H^{2k-i} + i! \sum_{k=j}^i l'_k H^{2k-i+1},$$

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{i!} D^i f(x_0) &= H^{2j-i} (l_j + l_{j+1} H^2 + l_{j+2} H^4 + \dots) \\ &\quad + l_i H^{2(i-j)} + H^{2j-i+1} (l'_j + l'_{j+1} H^2 + \dots) \\ &\quad + \dots + l'_{i-1} H^{2(i-j-2)} \end{aligned} \quad (6).$$

Hier ist noch zu setzen

$$H = 2iv, \quad H^2 = -4v^2.$$

Aus der Bedingung für j folgt, daß für den Exponenten $2j-i$ gilt: $1 \geq 2j-i \geq -1$. Und zwar ist für grades $i: 2j=i$, also $2j-i=0$, hingegen für ungrades $i: 2j=i-1$, also $2j-i=-1$. Im letzteren Falle fällt aber das erste Glied der ersten Klammer in (6) weg. Somit haben wir die beiden Fälle:

$$T_{2j} \equiv \frac{1}{(2j)!} D^{2j} f(x_0) = (l_j + l_{j+1} H^2 + l_{j+2} H^4 + \dots + l_{2j} H^{2j}) + H (l'_j + l'_{j+1} H^2 + \dots + l'_{2j-1} H^{2j-2}) \quad (7a),$$

$$T_{2j+1} \equiv \frac{1}{(2j+1)!} D^{2j+1} f(x_0) = H (l_{j+1} + l_{j+2} H^2 + \dots + l_{2j+1} H^{2j}) + (l'_j + l'_{j+1} H^2 + \dots + l'_{2j} H^{2j}) \quad (7b).$$

(Hierbei sollen die T die Taylorkoeffizienten andeuten.)

Bilden wir mittels (7a, b) die qualifizierten Differenzen, so finden wir

$$H T_{2j} - T_{2j-1} = H^{2j} (l'_{2j-1} + l_{2j} H) - l_{j-1} \quad (8a),$$

$$H T_{2j+1} - T_{2j} = H^{2j+1} (l'_{2j} + l_{2j+1} H) - l_j \quad (8b).$$

Der Gang des Verfahrens ist also folgender:

1. Man dividiert die gegebene Funktion $f(x)$ kettenmäßig, wiederholt durch $h(x) = x^2 - 2ux + (u^2 + v^2)$, wo $u + iv = x_0$ ist. Auf diese Weise bekommt man die linearen Funktionen l_0, l_1, l_2, \dots als Reste bei der Division. — Den Koeffizienten von x in l_i bezeichnen wir mit l'_i .

2. Man berechnet $f(x_0) \equiv T_0 = l_0(x_0)$ und $f'(x_0) \equiv T_1 = H \cdot l_1(x_0) + l'_0$.

3. Daraus berechnet man sukzessive:

$$T_2 = H^{-1} T_1 + H (l_1 + l_2 H) - l'_0 H^{-1},$$

$$T_3 = H^{-1} T_2 + H^2 (l'_1 + l_3 H) - l_1 H^{-1},$$

$$T_4 = H^{-1} T_3 + H^2 (l'_2 + l_4 H) - l'_1 H^{-1},$$

$$T_5 = H^{-1} T_4 + H^4 (l'_1 + l_5 H) - l_2 H^{-1},$$

wobei $H = 2iv$, $H^2 = -4v^2$ ist und die l_k an der Stelle x_0 berechnet werden.

4. Diese T_k sind dann die Taylorkoeffizienten an der Stelle x_0 , d. h.

$$f(x_0 + \alpha) = T_0 + T_1\alpha + T_2\alpha^2 + T_3\alpha^3 + \dots$$

In der Praxis wird man freilich dieses Verfahren nur bis höchstens T_3 benutzen und die folgenden T_k lieber durch Bestimmung des Funktionswertes der Ableitung $D^k f(x)$ an der Stelle x_0 bestimmen. Denn in der Praxis hat $f(x)$ doch höchstens den Grad 6, so daß die vierte Ableitung den Grad 2 besitzt.

Den Haag, Holland.

Dr. E. Bodewig.

Zur praktischen Anwendung der von Jordan angegebenen durch Höchstfehler begrenzten Fehlerverteilungen.

Der praktischen Anwendung der in einer vorausgegangenen Mitteilung behandelten Jordanschen Fehlerfunktion steht lediglich entgegen, daß der für ihren Potenzexponenten N und den Höchstfehler M maßgebliche Ausdruck

$$\frac{m^4}{v^4} = \frac{(\sum \varepsilon^2)^2}{\sum \varepsilon^4} = \frac{[\varepsilon^2]^2}{\varepsilon^4} \dots \dots \dots (1)$$

die Summe der Quadrate und Biquadrate der wahren Fehler ε enthält, während, von ganz seltenen Ausnahmen abgesehen, gewöhnlich nur die auf das arithmetische Mittel der Meßwerte bezogenen scheinbaren Fehler bekannt zu sein pflegen, die wie üblich mit dem Buchstaben v bezeichnet werden sollen. Es fragt sich, wie m^4 und v^4 aus diesen scheinbaren Fehlern zu berechnen sind. Die von Gauß herrührende, übrigens in wenig überzeugender Weise abgeleitete Formel

$$\left(m^2 = \frac{[v^2]}{n-1}\right)$$

setzt eine ins Unendliche reichende Fehlerverteilung voraus und kann daher nicht benutzt werden.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ mögen n im allgemeinen verschiedene Meßwerte sein, die sich bei Messungen ein und derselben Meßgröße mit den gleichen Hilfsmitteln und unter übereinstimmenden Bedingungen, auch hinsichtlich der Sorgfalt, ergeben haben. Dann ist das arithmetische Mittel \bar{x} dieser Meßwerte derjenige aus ihnen zu berechnende Wert, der nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit dem wahren Betrag X der Meßgröße so nahe kommen muß, als überhaupt erreichbar ist. Es verbleibt aber ein Restfehler f , der zwar gelegentlich auch einmal den Wert 0 haben kann, sonst aber immer einen kleinen positiven oder negativen Betrag ausmachen wird. Um zu einer Einschätzung zu gelangen, welcher wahrscheinliche Betrag diesem Restfehler zuzuschreiben ist, setzen wir in den Ausdruck

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad \text{des arithmetischen Mittels}$$

die wahren Meßfehler ein, das sind

$$X - x_1 = \varepsilon_1, X - x_2 = \varepsilon_2, X - x_3 = \varepsilon_3, \dots, X - x_n = \varepsilon_n;$$

es ergibt sich

$$f = X - \bar{x} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n}{n} = \frac{[\varepsilon]}{n} \quad (2).$$

Die einzelnen ε können positive oder negative Vorzeichen besitzen, wobei positive und negative Fehler desselben Absolutbetrages die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Daher müssen sich die ε im Zähler des vorstehenden Bruches stets größtenteils gegeneinander fortheben. Uns interessiert, was der Wahrscheinlichkeit nach von dieser Summe der wahren Fehler übrig bleibt, denn das ist gemäß (2) das n -fache des gesuchten Restfehlers f .

Man kann nun, um den wahrscheinlichen Summenwert der wahren Fehler zu ermitteln, umständliche wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen und Berechnungen anstellen; zu demselben Wert ist aber auch auf Grund wesentlich einfacher Überlegungen zu gelangen, die vielleicht etwas weniger beweiskräftig

erscheinen mögen, doch wegen des Vorteils der Raumersparnis hier bevorzugt werden sollen. Zu diesen Überlegungen muß man sich dessen bewußt werden, daß der Begriff eines wahrscheinlichen Summenwertes letzten Endes nur eine Fiktion darstellt, die von folgender Vorstellung ausgeht: Wenn man sich die n -Messungen der vorliegenden Meßgröße, um die es sich jeweils handelt, genügend oft, nämlich p -mal, unabhängig voneinander wiederholt denkt, wobei p unter Umständen eine sehr große Zahl sein mag, dann darf man annehmen, daß sich in der Folge der insgesamt $n \cdot p$ Fehler alle Zufälligkeiten der Messungen in dem Sinne ausgleichen, daß jede Zufälligkeit einer Richtung durch eine gleiche der entgegengesetzten Richtung aufgehoben wird; Der Wert, der sich unter dieser Voraussetzung ergeben würde, wenn man alle $n \cdot p$ Fehler addiert und darauf durch p dividiert, ist als der gesuchte wahrscheinliche Summenwert anzusehen. Es ist klar, daß der Möglichkeit einer vollständigen Erfüllung der gemachten Voraussetzung nur die Bedeutung einer Annahme zukommt, doch liegen solche Annahmen im Wesen jeder Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bei der gemachten Voraussetzung ist es aber offenbar ganz gleichgültig, wie groß die Anzahl n der zu einer Meßreihe gehörenden Messungen und Fehler gerade ist, weil man nämlich bei einer kleineren Anzahl n der Messungen die Anzahl p der Wiederholungen entsprechend größer nehmen kann und auch nehmen muß, um bestimmt den Ausgleich aller Zufälligkeiten, wenigstens in einem erwünschten Maße, zu erreichen. Um dieses Ausgleichs sicher zu sein, muß lediglich $n \cdot p$ einen bestimmten Mindestwert haben, während n an sich beliebig groß oder klein sein kann. Das besagt jedoch, daß der gesuchte wahrscheinliche Summenwert ganz von der Anzahl n unabhängig ist und demnach auch dann noch ungeändert derselbe bleibt, wenn man n auf die Zahl 1 beschränkt; anders ausgedrückt: Der wahrscheinliche Summenwert der wahren Fehler ist mit dem wahrscheinlichen Wert eines einzelnen wahren Fehlers identisch, also gleich dem sogenannten „wahrscheinlichen Fehler“ r , der die Gesamtheit aller Fehler in zwei Abschnitte gleicher Gesamtwahrscheinlichkeit teilt. Es ergibt sich $[\varepsilon] = r$ und daher

$$f = \pm \frac{r}{n} \quad \dots \dots \dots (3).$$

Mit diesem Wert des Restfehlers geht

$$m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{[(v_i + f)^2]}{n} = \frac{[v_i^2]}{n} + \frac{2f \cdot [v_i]}{n} + \frac{n \cdot f^2}{n} \quad (4),$$

weil bekanntlich immer $[r] = 0$ sein muß, über in

$$m^2 = \frac{[v_i^2]}{n} + f^2 = \frac{[v_i^2]}{n} + \left(\frac{r}{n}\right)^2 \quad \dots \dots (5).$$

Dieser Ausdruck läßt sich umformen in

$$m^2 = \frac{[v_i^2]}{n} + \frac{1}{n^2} \cdot m^2 \cdot \left(\frac{r}{m}\right)^2 \quad \dots \dots (6),$$

so daß man schließlich

$$m^2 = \frac{[v_i^2]}{n - \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{r}{m}\right)^2} \quad \dots \dots \dots (7)$$

bekommt. Da bei einigermaßen präzisen Messungen, wie in der vorausgegangenen Mitteilung gezeigt wurde, der Potenzexponent N der Fehlerverteilungsfunktion zwischen 1 bis 4 und das halb $\frac{r}{m}$ zwischen 0,7766 und 0,7166 liegen muß, erscheint es für weitaus die Mehrzahl aller praktisch vorkommenden Fälle hinreichend, statt des jeweils genauen Wertes von $\left(\frac{r}{m}\right)^2$ den Näherungsbetrag 0,5 einzusetzen, also mit

$$m^2 = \frac{[v_i^2]}{n - \frac{1}{2n}} \quad \dots \dots \dots (8)$$

zu rechnen, woraus aber

$$m^4 = \frac{[v_i^2]^2}{n^2 - 1} \dots \dots \dots (9)$$

folgt.

Andererseits erhält man für das mittlere Fehler-Biquadrat aus

$$v^4 = \frac{[\varepsilon_i^4]}{n} = \frac{[(v_i + f)^4]}{n} \dots \dots (10)$$

durch Ausrechnen der Klammer, durch Fortlassen der beiden Glieder, die $[v]$ bzw. f^4 enthalten, das immer sehr klein sein muß, und indem man näherungsweise wie schon zuvor $f^2 = \frac{r^2}{n^2} = \left(\frac{r}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cong 0,5 \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^2$ und

dementsprechend $f \cong \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{n}$ setzt,

$$v^4 = \frac{[v_i^4]}{n} \pm 3 \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{[v_i^2]}{n} + 3 \cdot \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{[v_i^2]}{n} \dots (11)$$

Dieser Ausdruck enthält in der Mitte ein Glied mit beiden Vorzeichen, das aus der prinzipiellen Unmöglichkeit hervorgeht, eine Entscheidung darüber zu treffen, ob dem Restfehler f das positive oder das negative Vorzeichen zukommt.

Wie das nachstehende, praktischen Messungen entnommene Beispiel lehrt, entspricht das eine Vorzeichen einer besseren und das andere einer geringeren Präzision der Meßergebnisse. Weiterhin läßt das nachstehende Beispiel auch erkennen, daß das Glied in der Mitte keinesfalls vernachlässigt werden kann, obwohl die einzelnen Summanden von $[v_i^2]$ beständig ihre Vorzeichen wechseln.

$N = 5,1800$, bzw. mit dem kleineren ν -Wert $N = 1,7783$.

Von diesen Ergebnissen müssen natürlich die ungünstigeren als maßgeblich gelten, das sind $\frac{M}{m} = 3,6551$,

woraus $M = 0,0284$ folgt, und $N = 5,18$. Als präzise Messungen können aber, wie in der vorausgegangenen Mitteilung erörtert wurde, nur solche gelten, bei denen $\frac{M}{m} \leq 3$ oder zum mindesten $N \leq 4$ ist. Die vorstehend

vorgelegten Meßwerte sind daher als nicht einwandfrei anzusehen. Daß sie wirklich billigerweise zu stellenden Anforderungen nicht genügen, beweist folgende Gruppen-Zusammenstellung:

$$\begin{array}{lll} v_1 = +0,0023 & v_3 = +0,0053 & v_4 = +0,0103 \\ v_2 = -0,0007 & & v_5 = -0,0117 \\ v_6 = -0,0017 & & v_7 = +0,0103 \\ v_8 = +0,0003 & & v_8 = -0,0147 \\ v_{10} = +0,0003 & & \end{array}$$

Wenn die Abweichungen der Meßwerte untereinander und gegenüber ihrem arithmetischen Mittel, wie das bei präzisen Messungen der Fall sein sollte, allein durch den Zufall bestimmt sind, ist die Vornahme einer solchen Einteilung ausgeschlossen. Die Möglichkeit einer derartigen Ordnung der Fehler, in der sich eine offene Ungleichwertigkeit der Meßwerte kundtut, läßt erkennen, daß neben dem Zufall noch andere ganz konkrete Umstände zur Entstehung der Meßfehler beigetragen haben. Bei präzisen Messungen, bei denen die Unterschiede der Meßwerte eine bessere Gleichförmigkeit als bei dem obigen Beispiel aufweisen, muß auch $[v_i^2]$ wegen der in dieser Summe ständig wechselnden Vorzeichen verhältnismäßig geringfügig wer-

Beispiel 1.

x_i	$v_i = x - x_i$	v_i^2	v_i^3	v_i^4
3,958	+0,0023	$5,29 \cdot 10^{-6}$	$+ 12,167 \cdot 10^{-9}$	$27,9841 \cdot 10^{-12}$
61	- 07	0,49	- 0,343	0,2401
55	+ 53	28,09	+ 148,877	789,0481
50	+ 103	106,09	+ 1092,727	11255,0881
72	- 117	136,89	- 1601,613	18738,8721
62	- 17	2,89	- 4,913	8,3521
50	+ 103	106,09	+ 1092,727	11255,0881
75	- 147	216,09	- 3176,523	46694,8881
60	+ 03	0,09	+ 0,027	0,0081
60	+ 03	0,09	+ 0,027	0,0081

Man erhält aus dieser Zahlenliste das arithmetische Mittel $x = 3,9603$, ferner $[v_i^2] = 602,1 \cdot 10^{-3}$, $[v_i^3] = -2,43684 \cdot 10^{-3}$, $[v_i^4] = 0,0887696 \cdot 10^{-6}$; infolge (8) ergeben sich hieraus $m^2 = 0,0000605$, $\frac{m^2}{n^2} =$

$0,000000605$, $m = 0,00778$ und $\frac{m}{n} = 0,000778$, so

daß zunächst wegen $f \cong \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{n} = \pm 0,00058$

$$X = x + f = 3,9603 \pm 0,0006$$

sein muß. Aus (11) bekommt man weiterhin $v^4 = (8,87696 \pm 0,56868 + 0,10930) \cdot 10^{-9} = 9,55494 \cdot 10^{-9}$ bzw. $8,41758 \cdot 10^{-9}$. ($f/n = 0,000009 \cdot 10^{-9}$ ist, wie oben vorausgesagt, gegenüber diesen Werten zu vernachlässigen.) Man findet dann mit $m = 0,00778$ und $m^4 = 3,66177 \cdot 10^{-9}$ aus den beiden in der vorausgegangenen Mitteilung abgeleiteten Formeln

$$\frac{M}{m} = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot \frac{m^4}{v^4} - 1}} \quad \text{und} \quad N = \frac{9 \cdot \frac{m^4}{v^4} - 5}{2 - 6 \cdot \frac{m^4}{v^4}} \dots (12)$$

$\frac{M}{m} = 3,6551$, bzw. mit dem kleineren ν -Wert

$\frac{M}{m} = 2,5606$ und

den, so daß dann die beiden Werte, die man für den Höchstfehler M erhält, und ebenso die beiden Werte, die sich für den Potenzexponenten N der Jordanschen Fehlerfunktion ergeben, enger zusammenrücken.

Nach den gebräuchlichen auf Gauß und seine Fehlerfunktion zurückzuführenden Regeln der Fehlerrechnung wäre die wahrscheinliche Abweichung des arithmetischen Mittels x vom wahren Wert X der Meßgröße aus

$$\left(f = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v_i^2]}{n \cdot (n-1)}} \right)$$

zu berechnen, woraus sich im Falle des vorgelegten Beispiels ($m = 0,00818$ nach Gauß ist nur wenig größer als der ermittelte Wert $m = 0,00778$) $f = 0,0025865$, das ist mehr als viermal so viel ergeben würde, wie oben gefunden wurde. Nun ist jedoch nach (2), ganz unabhängig davon, welche Fehlerverteilungsfunktion als zutreffend angesehen wird, $[\varepsilon_i] = n \cdot f$, so daß man mit dem vorstehenden Ausdruck für f

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n = m \cdot \sqrt{n})$$

bekäme. Diese Gleichung kann aber unmöglich stimmen, weil es ganz ausgeschlossen erscheint, daß die Summe der wahren Fehler trotz der verschiedenen Vorzeichen der einzelnen Fehler und obwohl übereinstimmende positive und negative Fehler gleich wahrscheinlich sind, trotzdem mit der Anzahl berücksichtigter

Messungen prinzipiell immer größer werden sollte; das widerspräche jeder Erfahrung.

Dem obigen sei folgendes Beispiel einer einwandfrei präzisen Messung gegenübergestellt

Beispiel 2.

x_i	v_i	v_i^2	v_i^3	v_i^4
128,0	-1,43	2,0449	-2,924207	4,18161801
8,5	-1,93	3,7249	-7,189057	13,87488001
4,1	+2,47	6,1009	+15,063223	37,22098081
6,3	+0,27	0,0729	+0,019683	0,00531441
5,0	+1,57	2,4649	+3,869893	6,07573201
7,5	-0,93	0,8649	-0,804357	0,74805201
6,2	+0,37	0,1369	+0,050653	0,01874161
6,0	+0,57	0,3249	+0,185193	0,10556001
6,6	-0,03	0,0009	-0,000027	0,00000081
7,5	-0,93	0,8649	-0,804357	0,74805201
		16,6010	+19,194645	56,97892970
			-11,722005	
			+7,472640	

Man findet hier $x = 126,57$, $m^2 = 1,66844$, $m = 1,29168$
 $f \pm 0,096876$, also

$$X = x + f = 126,57 \pm 0,10,$$

ferner $v^4 = 6,07055$ bzw. $5,49142$ und $\frac{m^4}{v^4} = 0,458557$

bzw. $0,506917$, woraus sich schließlich $\frac{M}{m} = 2,31$ bzw.

$1,96$, $M = 2,98$ bzw. $2,53$ und $N = 1,16$ bzw. $0,42$ ergeben. Wie diese Potenzexponenten der Jordanschen Fehlerfunktion zeigen, liegt hier, und das stellt sich recht oft auch bei andern Meßreihen heraus, eine Fehlerverteilung ganz wesentlich anderen Charakters vor, als der Gaußschen Fehlerfunktion entsprechen würde. Das beweist, daß es wirklich unsinnig ist, Fehlerberechnungen die Gaußsche Fehlerfunktion zugrunde zu legen.

Zum Schluß ist noch kurz auf die Frage einzugehen, wie die Präzision solcher Meßreihen zu beurteilen ist, bei denen man für die scheinbaren Fehler der Meßwerte nur je eine einstellige Ziffer erhält. Es erscheint zunächst zweifelhaft, ob auch in diesen Fällen das angegebene Kriterium $\frac{M}{m} \leq 3$ oder wenigstens $N \leq 4$

Anwendung finden kann. Zur Entscheidung dieser Frage möge die nachstehende Zahlenliste dienen.

Beispiel 3.

x_i	v_i	v_i^2	v_i^3	v_i^4
49,9	0,0	0,0	0,0	0,0
50,0	-0,1	0,01	-0,001	0,0001
49,7	+0,2	0,04	+0,008	0,0016
49,8	+0,1	0,01	+0,001	0,0001
50,1	-0,2	0,04	-0,008	0,0016
49,9	0,0	0,0	0,0	0,0
49,8	+0,1	0,01	+0,001	0,0001
49,9	-0,0	0,0	0,0	0,0
50,0	-0,1	0,01	-0,001	0,0001
49,9	0,0	0,0	0,0	0,0
		0,12	+0,010	0,0036
			-0,010	
			0,0	

Man bekommt hier $x = 49,9$, $m^2 = 0,0120603$, $m = 0,109819$, $f = \pm 0,00823643$, mithin $X = x + f = 49,9 \pm 0,01$, weiterhin $v^4 = 0,000364342$, $\frac{m^4}{v^4}$

$= 0,399215$ und daraus $\frac{M}{m} = 3,18$, $M = 0,35$ sowie

$N = 3,56$. Es ist also bei diesen Messungen zwar $\frac{M}{m} > 3$,

aber doch immerhin $N < 4$. Mithin darf augenscheinlich das angeführte Kriterium ganz allgemein angewendet werden.

Das beschriebene Rechenverfahren gestattet offenbar, die Präzision irgendwelcher Meßreihen so genau zu beurteilen, wie man sich nur wünschen kann, erfordert aber leider einen recht bedeutenden Zeitaufwand. Es bleibt somit zu untersuchen, ob vielleicht ein anderer Rechenweg gefunden werden kann, der die Präzision von Meßreihen ebenso treffend, aber einfacher und schneller zu beurteilen erlaubt.

Manbach/Thür.

Fritz Gabriel.

Kolbenbeschleunigungsdiagramm für normale Schubkurbelgetriebe mit großem $\lambda = \frac{r}{l}$.

Nach einem von Prof. Tolle angegebenen Verfahren (Hütte, Bd. II) läßt sich die Kolbenbeschleunigungskurve eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω umlaufenden Schubkurbelgetriebes in Abhängigkeit vom Kolbenweg näherungsweise durch eine Parabel darstellen, die in den Totlagen die Ordinaten

$$(s)_{s=0} = r \omega^2 \cdot (\lambda + 1)$$

$$(s)_{s=2r} = r \omega^2 \cdot (\lambda - 1)$$

und die Steigungen

$$\left(\frac{ds}{ds}\right)_{s=0} = -\omega^2 \cdot \frac{1 + 4\lambda}{1 + \lambda}$$

$$\left(\frac{ds}{ds}\right)_{s=2r} = -\omega^2 \cdot \frac{1 - 4\lambda}{1 - \lambda} \text{ hat.}$$

Während die verwendeten Totlagenordinaten $(s)_{s=0}$ und $(s)_{s=2r}$ fehlerfrei sind, haften den Steigungsausdrücken $\left(\frac{ds}{ds}\right)_{s=0}$ und $\left(\frac{ds}{ds}\right)_{s=2r}$ Fehler an, die dadurch entstehen, daß man von der Reihenentwicklung

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \lambda^4 \sin^4 \varphi - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \lambda^6 \sin^6 \varphi - \dots$$

nur die beiden ersten Glieder verwendet.

Die Größe dieser Fehler, die mit zunehmendem λ wachsen, kann man leicht auf folgende Weise ermitteln: Aus dem Kolbenweg für den Hingang

$$s = r \cdot (1 - \cos \varphi) + l \cdot (1 - \cos \psi)$$

erhält man mit

$$\varphi = \omega \cdot t$$

$$\lambda = \frac{r}{l}$$

$$\text{und } \cos \psi = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$$

die Kolbengeschwindigkeit

$$s = r \omega \cdot \sin \varphi \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}\right)$$

und die Kolbenbeschleunigung

$$s = r \omega^2 \cdot \cos \varphi + \frac{r \omega^2 \lambda}{\cos \psi} \cdot \left\{ \cos 2\varphi + \frac{\lambda^2}{4} \cdot \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos^2 \psi} \right\}.$$

Die Steigung der Beschleunigungskurve $\ddot{s}(s)$ erhält man durch Bildung von

$$\frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}}.$$

Diese Rechnung ausgeführt, liefert

$$\frac{ds}{ds} = \frac{\omega^2}{\cos \psi + \lambda \cos \varphi} \cdot \left\{ -\cos \psi - 4\lambda \cos \varphi + 3\lambda^3 \cdot \frac{\cos \varphi \cdot \cos 2\varphi}{\cos^2 \psi} + \frac{3}{4} \lambda^5 \cdot \frac{\cos \varphi \sin^2 2\varphi}{\cos^4 \psi} \right\}.$$

Damit ergeben sich die streng richtigen Steigungen der Beschleunigungskurve in den Totlagen zu

$$\left(\frac{d\ddot{s}}{ds}\right)_{\varphi=0} = -\omega^2 \cdot \frac{1+4\lambda}{1+\lambda} + \frac{3\omega^2\lambda^3}{1+\lambda}$$

$$\left(\frac{d\ddot{s}}{ds}\right)_{\varphi=\pi} = -\omega^2 \cdot \frac{1-4\lambda}{1-\lambda} - \frac{3\omega^2\lambda^3}{1-\lambda},$$

woraus die Fehler

$$f_1 = \left(\frac{d\ddot{s}}{ds}\right)_{\varphi=\gamma} - \left(\frac{d\ddot{s}}{ds}\right)_{s=0} = \frac{3\omega^2\lambda^3}{1+\lambda}$$

$$f_2 = \left(\frac{d\ddot{s}}{ds}\right)_{s=2r} - \left(\frac{d\ddot{s}}{ds}\right)_{\varphi=\pi} = \frac{3\omega^2\lambda^3}{1-\lambda} \text{ folgen}$$

Die Konstruktion der fehlerfreien Totlagentangenten kann man auf folgende Weise einfach durchführen:

Man zeichnet zunächst die Totlagentangenten nach dem von Tolle angegebenen Verfahren (in Abb. 1

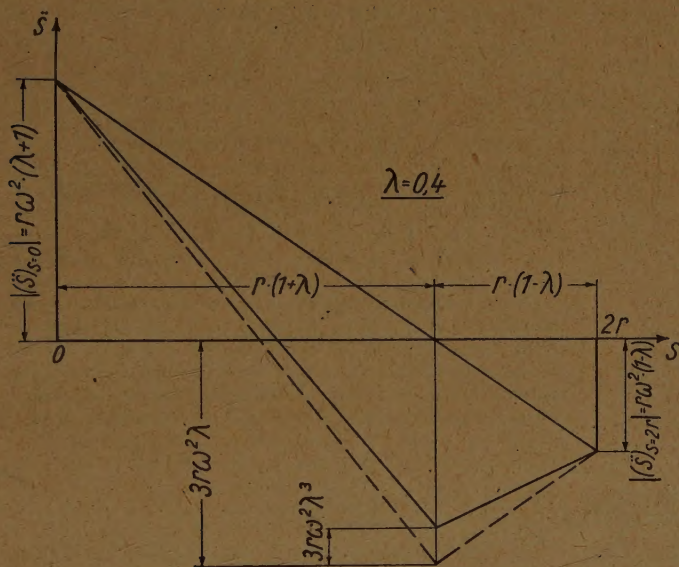


Bild 1. Konstruktion der fehlerfreien Totlagentangenten an die Beschleunigungskurve.

gestrichelt) und trägt dann vom Tangentenschnittpunkt senkrecht nach oben die Strecke $3r\omega^2\lambda^3$ ab, wodurch der Schnittpunkt der fehlerfreien Totlagentangenten bereits gewonnen ist; denn man erhält aus Abb. 1 für die Steigungen der Totlagentangenten

$$\left(\frac{d\ddot{s}}{ds}\right)_{\varphi=0} = -\frac{r\omega^2 \cdot (\lambda+1) + 3r\omega^2\lambda - 3r\omega^2\lambda^3}{r \cdot (1+\lambda)}$$

$$= -\omega^2 \cdot \frac{1+4\lambda}{1+\lambda} + \frac{3\omega^2\lambda^3}{1+\lambda}$$

$$\left(\frac{d\ddot{s}}{ds}\right)_{\varphi=\pi} = -\frac{r\omega^2(1-\lambda) - 3r\omega^2\lambda + 3r\omega^2\lambda^3}{r \cdot (1-\lambda)}$$

$$= -\omega^2 \cdot \frac{1-4\lambda}{1-\lambda} - \frac{3\omega^2\lambda^3}{1-\lambda}$$

Errechnete Kolbenweg- und Kolbenbeschleunigungswerte zu den Bildern 2 und 3.

$r = 100 \text{ mm}$ $r\omega^2 = 100 \text{ mm s}^{-2}$	$\varphi [^\circ]$	0	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	180°
$\lambda = 0,4$	$s [\text{mm}]$	0	18,4	39,3	65,5	93,6	121	145,4	165,5	180,7	191,6	200
	$\frac{s}{s^2} [\text{mm}]$	140,0	108,3	72,5	30,1	-11,1	-43,7	-62,9	-69,9	-68,9	-64,9	-60,0
	$\frac{s}{s^2} [\text{mm}]$	0	20,0	42,3	69,8	99,1	126,8	150,9	169,8	183,7	193,2	200
$\lambda = 0,5$	$\frac{s}{s^2} [\text{mm}]$	150,0	114,9	74,5	25,5	-22,4	-57,8	-74,2	-74,5	-66,9	-58,3	-50,0

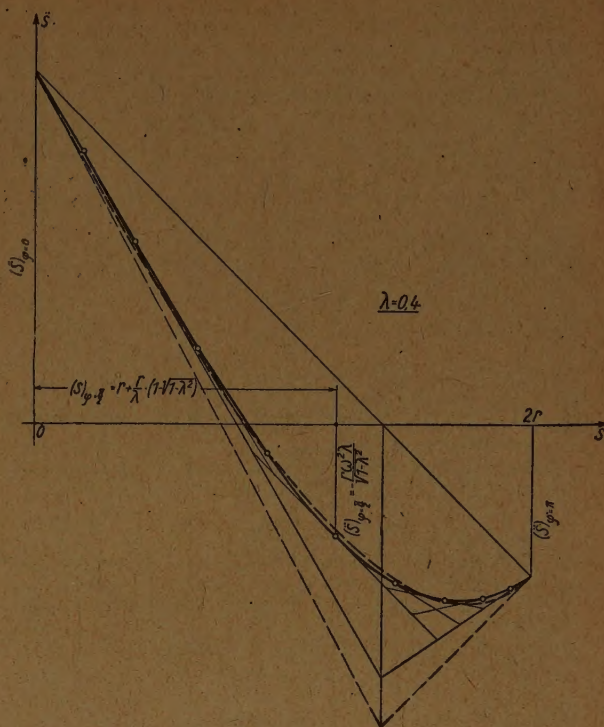


Bild 2. Konstruktion der Beschleunigungskurve unter Verwendung der fehlerfreien Totlagentangenten und des berechneten Wertes

$$(\ddot{s})_{\varphi=\pi/2}$$

in Übereinstimmung mit den errechneten Ausdrücken.

Die Strecke $3r\omega^2\lambda^3$ macht außerdem gerade das λ^2 -fache der Strecke $3r\omega^2\lambda$ aus, wobei letztere beim Verfahren von Tolle ohnehin aufgetragen werden muß.

Die Konstruktion der Kolbenbeschleunigungskurve nach Tolle kann genügend genau angesehen werden für $\lambda \leq 0,2$.

Für größere λ ($0,2 < \lambda \leq 0,4$) empfiehlt es sich jedoch, zur Erreichung einer größeren Genauigkeit die fehlerfreien Totlagentangenten zur Konstruktion der Kurve zu verwenden und sich außerdem einen weiteren, leicht berechenbaren Punkt der Kurve zu verschaffen. Ein solcher ist der Wert für $\varphi = \pi/2$. Dort wird

$$(s)_{\varphi=\pi/2} = r + \frac{r}{\lambda} \cdot (1 - \sqrt{1 - \lambda^2})$$

$$(\ddot{s})_{\varphi=\pi/2} = -\frac{r\omega^2\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

$$\left(\frac{d\ddot{s}}{ds}\right)_{\varphi=\pi/2} = -\omega^2$$

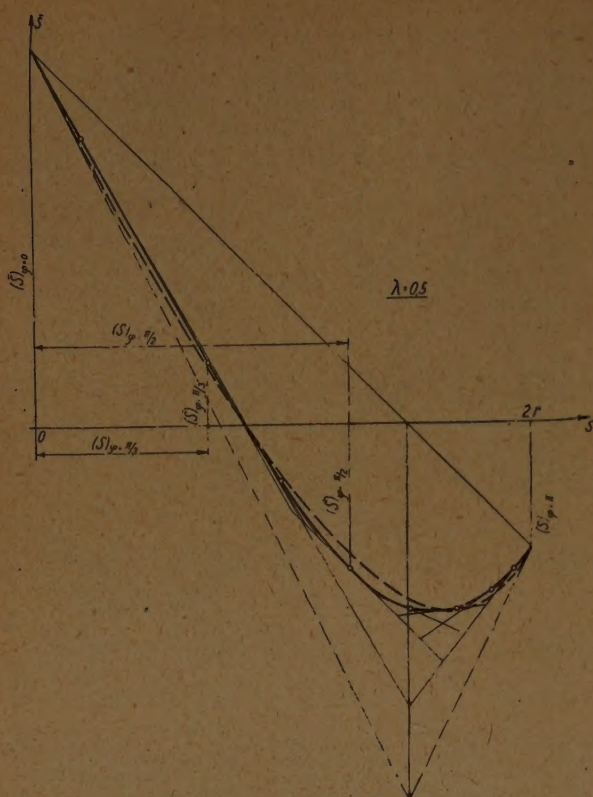


Bild 3. Konstruktion der Beschleunigungskurve unter Verwendung der fehlerfreien Totagentangenten und der berechneten Werte $(\ddot{s})_{\varphi=\pi/2}$ und $(\ddot{s})_{\varphi=\pi/3}$.

Die Steigung der Kurve an der Stelle $\varphi = \pi/2$ ist die gleiche wie die der Geraden, die die Endpunkte der Ordinaten $(\ddot{s})_{\varphi=\pi/2}$ und $(\ddot{s})_{\varphi=\pi/3}$ miteinander verbindet.

Die Beschleunigungskurve selbst setzt sich dann aus zwei Parabeln zusammen, die an der Stelle $(s)_{\varphi=\pi/2}$ ineinander übergehen, wie es aus Abb. 2 zu ersehen ist.

Abb. 2 enthält weiter zum Vergleich die nach dem Verfahren von Tolle konstruierte Beschleunigungskurve gestrichelt und eine Reihe errechneter Beschleunigungswerte, die aus nebenstehender Tabelle entnommen werden können.

Für noch größere λ ($\lambda > 0,4$) treten auch bei der Konstruktion nach Abb. 2 wieder größere Ungenauigkeiten auf und es ist für diesen Fall die Bestimmung eines weiteren Punktes der Kurve zweckmäßig. Da für $\lambda > 0,4$ die Kurve nach Abb. 2 im Intervall $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

die größten Abweichungen zeigt, wurde in Abb. 3 die Stelle $\varphi = \pi/3$ gewählt. Man erhält mit $\varphi = \pi/3$

$$\begin{aligned} (s)_{\varphi=\pi/3} &= r/2 + r \cdot (1 - \sqrt{1 - 0,75 \lambda^2}) \\ (s)_{\varphi=\pi/3} &= \frac{r \omega^2}{2} + r \omega^2 \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{1 - 0,75 \lambda^2}} \\ &\quad \times \left[-0,5 + \frac{3}{16} \cdot \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 - 0,75 \lambda^2}} \right)^2 \right] \\ \left(\frac{ds}{ds} \right)_{\varphi=\pi/3} &= \frac{\omega^2}{\sqrt{1 - 0,75 \lambda^2} + \lambda/2} \cdot \left\{ -\sqrt{1 - 0,75 \lambda^2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \lambda - \frac{3}{4} \cdot \frac{\lambda^3}{1 - 0,75 \lambda^2} + \frac{9}{32} \cdot \frac{\lambda^5}{(1 - 0,75 \lambda^2)^2} \right\} \end{aligned}$$

Die Kurve selbst besteht dann aus 3 Parabeln, die an den Stellen $\varphi = \pi/3$ und $\varphi = \pi/2$ ineinander übergehen. Zum Vergleich wurden auch in Abb. 3 gestrichelt die Beschleunigungskurve nach Tolle und die aus der Tabelle entnommenen berechneten Beschleunigungswerte eingezeichnet.

Heinz Link.

BUCHBESPRECHUNGEN

George Wellington Spenceley u. Rheba Murray Spenceley (Miami University, Oxford, Ohio), Elliptic functions tables. (Washington 1947, Smithsonian Institution.) 366 S., 15 cm breit, 23 cm hoch, gebunden.

Diese Tafeln lehnen sich an die Form an, die Sir George Greenhill und Oberst R. L. Hippisley in einem früheren Smithsonian-Bande benutzt haben. Wenn man das Buch an einer beliebigen Stelle aufschlägt, findet man auf der linken und rechten Seite je vier Zahlensäulen mit 12 Dezimalen; in den üblichen Bezeichnungen nämlich auf der linken Seite $u = F$, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$; auf der rechten Seite φ , $E(\varphi, k)$, $\theta_1(v)/\theta_1(0)$, $\theta_0(v)/\theta_0(0)$. In der Seitenüberschrift ist der Legendresche Modulwinkel $\Theta = \arcsin k$ angegeben. Er läuft durch das Buch in ganzen Graden von $1-89^\circ$. Am Kopf der linken Seite stehen die vollständigen Integrale K, K', E, E' , am Kopf der rechten Seite $q, q', \theta_0(0,5)/\theta_0(0)$ und sein Kehrwert $\theta_0(0)/\theta_0(0,5)$. Die Zahlen am Kopf der Seiten haben 15 und mehr Dezimalen. Für jeden Modul werden vier Seiten beansprucht: Auf der ersten und zweiten Seite geht $r = 180 v$ in 46 Zeilen von 0 bis 45, auf der dritten und vierten Seite von 45 bis 90 (immer um 1 fortschreitend). Differenzen sind in die Tafel nicht eingedruckt. Diese Tafel umfaßt also $4 \times 89 = 356$ Seiten. Am Schluß des Buches werden der Hyperbelsinus und der Hyperbelcosinus der Zahlen $\pi r/180$ ($r = 1, 2, 3, \dots, 89, 90$) mit 15 Dezimalen angegeben und auf einer Seite mit 25 Dezimalen der Kreissinus und Kreis-cosinus der Winkel $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots, 44^\circ, 45^\circ$.

Im Vorwort wird angegeben, wie die Richtigkeit der berechneten Zahlen geprüft worden ist. In einem Anhang von fünf Seiten wird mitgeteilt, wie die in der Tafel angegebenen Zahlen berechnet worden sind.

Für den Druck der Tafel sind Ägyptische-Ziffern verwendet, ziemlich genau gleich denen in der Logarithmentafel von Schrön (unveränderliche Strichstärke, alle Ziffern gleich hoch). Der Durchschuß zwischen den Zeilen ist genügend groß, nämlich 1,1 mm, nach je 5 Zeilen 5,0 mm. Das Papier ist nicht weiß, sondern leicht gelblich und nicht glänzend.

Die zwölfstellige Spenceleysche Tafel ist recht verschieden angeordnet von der kleinen fünfstelligen Tafel von L. M. Milne-Thomson, die 1931 in Berlin bei Springer erschienen ist. Die Tafel von Milne-Thomson besteht aus drei Hauptteilen, einem für $\operatorname{sn} u$, einem für $\operatorname{cn} u$, einem für $\operatorname{dn} u$. Die drei Funktionen erscheinen also nicht auf derselben Seite. Als Argument benutzt Milne-Thomson das Legendresche Normalintegral erster Gattung $F = u$ (also nicht $r = 180 v = 90 u/K$ oder sonst ein Vielfaches von u/K). Der Modul ist bei Milne-Thomson $m = k^2 = \sin^2 \Theta$ (also nicht $\Theta = \arcsin k$), den wohl zuerst Nagaoka empfohlen hat. Auf jedem Paar sich gegenüber stehender Seiten findet man elf Spalten mit den Moduln 0,0, 0,1, ..., 0,9, 1,0. In den Zwischenzeilen stehen seitlich in kleinerer Schrift Differenzen bei festem m und fortschreitendem u .

Nach freundlicher, brieflicher Auskunft von Herrn und Frau Spenceley ist zur Berechnung eine Rechenmaschine „Monroe“ mit zehn Wagenstellungen und Handantrieb benutzt worden. Alle Zahlen sind unmittelbar aus den definierenden Ausdrücken original berechnet worden. Von einer Untertafelung ist nicht Gebrauch gemacht worden. Im Vorwort werden sechs Studenten als zeitweilige Mitarbeiter genannt.

Die Werte von q sind auf 16 Stellen genau berechnet worden, die andern Werte auf 15 Stellen genau. Davon

sind 12 Stellen in die Tafel aufgenommen worden. Der Hauptteil der Rechenarbeit hat sich über einen Zeitraum von fünf Jahren erstreckt, mit Ergänzungen auf sieben Jahre. Es waren mindestens $8 \times 90 \times 89 = 64080$ zwölfstellige Funktionswerte zu berechnen oder 768 960 Ziffern. Kein Sachkundiger wird der Ausdauer und Beharrlichkeit, die für diese Riesearbeit erforderlich waren, seine tiefe Bewunderung versagen. Die Spenceleysche Tafel dürfte für lange Zeit ein Fundament bilden, ähnlich den Legendreschen Tafeln der elliptischen Integrale.

Fritz Emde.

Dr. F. Strecker, Die elektrische Selbsterregung mit einer Theorie der aktiven Netzwerke. 142 S. m. 62 Abb. Stuttgart 1947, Verlag S. Hirzel. Preis brosch. 7.80 DM.

In diesem nicht gerade für den Anfänger bestimmten Werk werden die in der Regel- und Verstärkertechnik wichtigen Fragen nach der Stabilität linearer Systeme vom Standpunkt des elektrischen Nachrichtentechnikers mit vielen Beispielen betrachtet. Die Schwachstromtheorie wird als geläufig vorausgesetzt. Im ersten Teil des Buches wird zunächst die Stabilitätsbedingung physikalisch-anschaulich gefaßt; anschließend wird sehr ausführlich gezeigt, wie sich die entscheidenden Wurzeln mit positiven Realteilen aus den auftretenden Prüfungsgleichungen bestimmen lassen. Verfasser bedient sich dabei der einfachen Mittel der elektrischen Ortskurventheorie; wie im Vorwort betont, sollen damit in der Praxis eingebürgerte fehlerhafte Auffassungen und Anwendungen der Ortskurvenkriterien beseitigt werden. Es wäre wünschenswert, an dieser Stelle wenigstens kurz auch auf die algebraischen Untersuchungsmethoden einzugehen, damit der Praktiker, für den das Buch bestimmt ist, einmal alle Verfahrensmöglichkeiten nebeneinander sieht. Im zweiten Teil des Buches ist zur Sicherung von Prioritätsansprüchen an den Ortskurvenkriterien ein Aufsatz des Verfassers aus dem Jahre 1931 abgedruckt. Gegenüber dem ersten Teil kommt darin nur eine ausführliche — bei komplizierten Netzsystemen dringend notwendige — Anleitung zur Aufstellung der Bestimmungsgleichungen eines aktiven Netzsystems hinzu.

Dresden.

N. J. Lehmann.

Dr. S. Flüge (o. Prof. a. d. Universität Marburg), Theoretische Optik, die Entwicklung einer physikalischen Theorie. (Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften, herausgeg. v. Dr. H. Poltz.) Notdruck, 124 S. m. 31 Abb. Wolfenbüttel und Hannover 1948, Wolfenbütteler Verlagsanstalt. Preis brosch. 8,— DM.

Das kleine Werk, das als Lehrbuch der theoretischen Optik für Studenten gedacht ist, bringt eine Darstellung des Gebietes, die sich nach Ziel und Anlage von den Standardwerken unserer Lehrbuchliteratur unterscheidet. Der Verfasser hat die Absicht, am Beispiel der Optik zu zeigen, wie eine physikalische Theorie entsteht, wie sie begrenzt ist, und wie sie schließlich einer besseren weichen muß. Dieses Ziel wird erreicht, indem die einzelnen Entwicklungsstufen der Theorie des Lichtes ganz ausführlich geschildert werden. Ausgangspunkt ist eine Gegenüberstellung der Gedankengänge von Newton und Huygens. Daran anschließend wird, der geschichtlichen Entwicklung entsprechend, eine Darstellung der Wellenlehre gegeben. Dabei wird die Theorie der elastischen Ätherwellen, die elektromagnetische Lichttheorie (mit einigen etwas ausführlicher gehaltenen Anwendungen auf spezielle Probleme wie Beugung und Dispersion) und schließlich die Optik bewegter Körper gebracht. Das Schlußkapitel enthält die Lichtquantenhypothese.

Es ist nicht verwunderlich, daß das kleine Buch manche, zum normalen Lehrprogramm gehörende Gegenstände nicht enthält (Kristall-Optik), oder nur in den Grundzügen streift (geometrische Optik). Der Student wird daher mit dem Buch allein nicht aus-

kommen. Dafür erhält er aber in ausgezeichnete, klarer Form einen Einblick in das Wachsen der Theorie, wie ihn sonst nur viel umfangreichere Werke ermöglichen. Das Buch wird daher nicht nur den Studenten, sondern auch den bereits im Berufsleben Stehenden von großem Nutzen sein.

Dresden.

A. Recknagel.

Dr. Lothar Collatz, o. Prof. an der Techn. Hochschule Hannover, Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, herausgegeben von E. Kamke und A. Kratzer. Reihe A, Band 19.) XIII + 338 S. mit 104 Abb. und 12 Tafeln. Leipzig 1945, Akademische Verlagsgesellschaft. Preis geb. 22,— DM.

In Band 19 dieser Zeitschrift hat Verf. einen ausführlichen Bericht über die genäherte Berechnung von Eigenwerten veröffentlicht. Das vorliegende Buch bringt nun eine lehrbuchmäßige Darstellung dieses Gebietes, die in der Hauptsache die volldefiniten Probleme berücksichtigt. Von den verschiedenen Wegen, die man zur Behandlung dieser Fragen einschlagen kann, wird der über die Differentialgleichungen bevorzugt, weil er für gewöhnliche Differentialgleichungen der weittragendste ist. Für partielle Differentialgleichungen ist diese Methode allerdings noch wenig brauchbar. Es kommt daher auch als anderer Zugangsweg der über die klassische Theorie der Integralgleichungen zur Behandlung, wo die Existenz der Greenschen Funktion vorausgesetzt wird. Dieser Weg führt bis zu den Gleichungen der sog. Eingliedklasse. Schließlich wird auch als dritter Weg der der Variationsrechnung dargestellt, der besonders zur Behandlung der Ritzschen und der damit verwandten Methoden brauchbar ist.

Nach einer umfangreichen Zusammenstellung verschiedenartiger Probleme, meist aus dem Gebiete der Mechanik, werden die mathematischen Hilfsmittel behandelt und ein Abriss der mathematischen Theorie gegeben. In diesem Abschnitt werden zunächst die Minimaleigenschaften der Eigenwerte bewiesen, die dann die wesentliche Grundlage für die in den späteren Kapiteln behandelten Methoden zu ihrer genäherten numerischen Berechnung bilden. Hier wird auch ein sorgfältiger Beweis des Entwicklungssatzes gebracht, der bis einschließlich der Eingliedklasse gilt. Es schließt sich im nächsten Kapitel das Verfahren der schrittweisen Näherung an; in dem Mittelpunkt dieses Abschnittes steht der Templesche Einschließungssatz. Aber auch andere Einschließungssätze werden behandelt. Weiter werden dann die Minimaleigenschaften numerisch bei den Verfahren von Ritz, Galerkin, Grammel usw. verwertet. Es folgen die Differenzenverfahren für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen und schließlich einige andere Methoden wie die der Störungsrechnung usw.

Das Buch zeichnet sich vor allem durch eine große Zahl von meist durchgerechneten Beispielen und Aufgaben, in denen eine außerordentliche Arbeit steckt, aus. Auf Einzelheiten einzugehen, würde hier zu weit führen und erübrigt sich wohl auch, da, wie der Verlag mitteilt, in nächster Zeit eine Neuauflage des trefflichen Buches erscheinen soll.

Dresden.

Willers.

Dr. phil. L. Föppl (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule München), Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure. Band III: Der ebene Spannungszustand. 192 S. mit 82 Abb., München 1947. Leibniz-Verlag. Preis geb. 15,— DM.

Den beiden vor etwa 20 Jahren erschienenen bekannten Bänden von „Drang und Zwang“ läßt jetzt L. Föppl einen dritten Band folgen, der etwa den halben Umfang hat wie jeder der beiden früheren Bände. Wie das Buch von Nadai „Elastische Platten“ oder das von Flüge „Statik und Dynamik der Scha-

len“, so will auch das vorliegende ein Teilgebiet der Elastizitätstheorie behandeln, nämlich die Scheibenprobleme. Es führt also Teile des vierten Abschnittes des ersten Bandes weiter. Verf. hofft, daß die behandelten Probleme für die Weiterentwicklung der Spannungsoptik, die ihm ja besonders am Herzen liegt, von Bedeutung sein können.

Über den Inhalt des Buches mögen die Überschriften der neun Kapitel, von denen das dritte und sechste besonders umfangreich sind, orientieren. I. Allgemeine Grundlagen des ebenen Spannungszustandes. II. Die unendliche Halbebene und der Keil bei stetiger Randbelastung. IV. Die Inversion ebener Spannungszustände. V. Die allseitig unendliche Ebene unter Belastung. VI. Der ebene Spannungszustand in krummlinigen Koordinaten. VII. Geschlossene und offene Ringe. VIII. Spannungen durch Eigengewicht und durch Zentrifugalkräfte sowie Wärmespannungen. IX. Abweichungen von der Isotropie und vom Hookeschen Gesetz.

Wie die beiden ersten Bände so zeichnet sich auch dieser dritte durch seine breite und gut lesbare Darstellung aus, ferner dadurch, daß die einzelnen Beispiele auch wirklich bis zu Ende durchgeführt sind. Die Darstellung macht in ausgiebigem Maße von den Airyschen Spannungsfunktionen Gebrauch. Die zu einem Problem gehörende Funktion wird meist unvermittelt an den Anfang der Betrachtungen gestellt.

Wünschenswert wäre es, wenn angedeutet würde, wie man im einzelnen Falle gerade zu dieser Funktion kommt. Hier und da bedürfte es vielleicht einiger Ergänzungen und Perichtigungen. Sollte man z. B. nicht darauf hinweisen, daß der ebene Spannungszustand nur näherungsweise für dünne Scheiben gilt? Ob für die in Bild 58 bis 61 dargestellten Scheiben die angegebenen Spannungszustände zu eindeutigen Verschiebungen führen, erscheint mir zweifelhaft. Die Zusammensetzung der Spannungen für die allseitig gezogene Ebene mit zwei gleichgroßen kreisrunden Löchern, z. B. aus dem der gleichmäßig belasteten Halbebene mit einem Loch, wie es der Verf. angibt, würde dazu führen, daß auf der Symmetrielinie zwischen den beiden Löchern überall eine konstante Normalspannung herrscht. Das ist aber wohl doch nicht der Fall. Bei der gegebenen Lösung sind eben, wie schon Weber in dieser Zeitschrift 2 (1922) 185—187 gezeigt hat, die Zusammenhangsverhältnisse nicht gewahrt.

Diese Bedenken beziehen sich auf einige Einzelheiten. Als Ganzes ist dieser dritte Band von „Drang und Zwang“ ein Buch, von dem man nur wünschen kann, daß es in so hoher Auflage erschienen ist, daß es in die Hände aller derer kommt, die an den hier behandelten Problemen interessiert sind.

Dresden.

Willers.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

Dr. Josef Lense (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule München), Vorlesungen über höhere Mathematik. 260 S. mit 102 Abb. München 1948, Leibniz-Verlag. Preis geb. 20.— DM.

Dr. W. Haack (vorm. o. Prof. an der Techn. Hochschule Berlin-Charlottenburg), Differential-Geometrie. Teil I (Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften. Herausgegeben von Dr. Henry Poltz), 136 S. mit 19 Abb. Wolfenbüttel-Hannover 1948. Wolfenbütteler Verlagsanstalt G.m.b.H. (Notdruck). Preis brosch. 9.— DM.

Dr. Fr. Schilling (o. em. Prof. d. Techn. Hochschule Danzig), Die Bewegungstheorie im nichteuklidischen hyperbolischen Raum. Bd. I: VI + 138 S., Bd. II: IV + 149 S. m. 118 Abb. München 1948, Leibniz-Verlag. Preis brosch. 35.— DM.

Dr. M. Czerny (Direktor des Physikalischen Institutes der Universität Frankfurt a. M.), unter Mitarbeit von Dr. H. Muser, Assistent am Physikal. Inst. d. Univ. Frankfurt a. M., Anweisungen zum Physikalischen Praktikum. VIII

+ 114 S. mit 63 Abb. Frankfurt a. M. 1948, Verlag Dr. Dietrich Steinkopff. Preis brosch. 8.— DM.

Dr. Siegfried Flüge (o. Prof. an der Universität Marburg), unter Mitarbeit von Dr. Hans Marschall, Rechenmethoden der Quantentheorie dargestellt in Aufgaben und Lösungen. I. Teil: Elementare Quantenmechanik. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band LIII) X + 240 S. mit 18 Abb. Berlin und Göttingen 1947. Springer-Verlag. Preis brosch.: 18.— DM.

Dr. Fr. Hund (o. Prof. a. d. Universität Jena), Einführung in die theoretische Physik, Band I: Mechanik (Zweite ergänzte Aufl.). Meyers kleine Handbücher Bd. 45/46. 303 S. mit 128 Abb. Leipzig 1948. Bibliographisches Institut. Preis brosch. 5,80 DM.

Dr. Fr. A. Willers (o. Prof. an d. Techn. Hochschule Dresden), Elementarmathematik, ein Vorkurs zur höheren Mathematik. 260 S. m. 172 Abb. Dresden und Leipzig 1948. Verlag Theodor Steinkopff. Preis geb. 16.— DM., brosch. 14.— DM.

NACHRICHTEN

Berlin: Am 9. Juni 1948 verstarb im 79. Lebensjahre der bekannte Rechenmaschinenkonstrukteur **Christel Hamann**, Ehrendoktor und Ehrensenator der Technischen Universität Berlin.

Stuttgart: Der o. Prof. für theoretische Physik **Dr. Fues** wurde von der Universität München zum Honorarprofessor ernannt.

Hamburg: Dem o. Prof. an der Universität Marburg **Dr. Max Friedrich Deuring** wurde das durch den Tod von Prof. Dr. Hecke freigewordene Ordinariat für Mathematik an der Universität Hamburg übertragen.

Marburg: Der Dozent, Herr **Dr. Herbert Grötzsch**, wurde zum apl. Professor für Mathematik von der Universität Marburg ernannt.

Verantwortlich für den Inhalt: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden; für den Verlag: H. Kaesser, Berlin. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin NW 7, Schiffbauerdamm 19, Fernsprecher: 42 50 01 (App. 274), Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/28/9. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich RM 15.— zuzüglich Bestellgeld, Einzelheft RM 6.—. Verantwortlich für den Anzeigenteil: Curt F. W. Schreiber, Berlin. Druck: Julius Beltz, Langensalza. (Th. B.-Nr. 04011/16/b) — Nr. 569. — Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 840 der Sowjetischen Militär-Verwaltung in Deutschland.